

Since 2008



चंद्रा इंस्टीट्यूट

(ISO 9001-2008 Certified Institute)

सरकारी नौकरी के लिए एक मात्र विश्वसनीय संस्थान

SSC BANK RLY.

TET

CTET

SUPER TET

प्राथमिक
शिक्षक

वाणिज्य

प्रयागराज ब्रांच

मो.: 9936444560, 8400333264

आगरा ब्रांच

मो.: 8081537731, 8957608596



Tricky English Expert

Air Conditioner Classes

वाणेश पाण्डेय सर एवं टीम के मार्गदर्शन में।

Web: www.chandrasekharinstitute.com | E-Mail: chandrasekharinstitute@rediffmail.com

* अंकीय क्षमता

* विशाल्य

* गुणनयण

* स्थानीयमम

* प्रतिशतता

* लाभ-हानि

* व्याज

* औसत

* ल०स० औरम०स०

* करणी

* घातांक

* भिन्न

* वर्गमूल एवं घनमूल

* क्षेत्रफल

* आयतन

* सामान्य सांख्यिकी

* सामान्य ज्यामिती

* सामान्य बीजगणित

अंकीय क्षमता (Numerical Ability)

1. इकाई का अंक ज्ञात करना -

- (i) गुणनफल में इकाई का अंक
- (ii) घात में इकाई का अंक
- (iii) Factorial पदों में इकाई का अंक

2. गुणनखण्ड [Factorisation]

- (i) अभ्यास गुणनखण्डों की संख्या ज्ञात करना
- (ii) कुल गुणनखण्डों की संख्या ज्ञात करना
- (iii) कुल गुणनखण्डों का योग ज्ञात करना

3. विभाज्य - I भाग के लंबी विधि पर प्रश्न =

(A) ~~सूत्र पर प्रश्न~~

(B) जब प्रश्न में दो बार भाग देने की शर्त हो।

(C) योग - अन्तर पर प्रश्न

घातांकीय भाग पर =

(A) सूत्र पर प्रश्न

(B) घातांकीय योग के भाग पर

(C) - शेषफल प्रमेय पर प्रश्न

(D) - विभाज्यता की शर्त पर प्रश्न

(E) - भाग के गुणनखण्ड विधि पर प्रश्न $\left[\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right]$

4. सही - गलत प्रश्न की संख्या ज्ञात करना

5. जानवरों पर प्रश्न $\left[\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right]$

6. दस्तमिलाप पर प्रश्न 2

1. इकाई का अंक ज्ञात करना :-

- (i) गुणनफल में इकाई का अंक
- (ii) घात में इकाई का अंक
- (iii) Factorial पदों में इकाई का अंक

2. गुणनखण्ड [Factorisation]

- (i) अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या ज्ञात करना
- (ii) कुल गुणनखण्डों की संख्या ज्ञात करना
- (iii) कुल गुणनखण्डों का योग ज्ञात करना

3. विभाज्य - I भाग के लंबी विधि पर प्रश्न =

(A) ~~सूत्र पर प्रश्न~~

(B) जब प्रश्न में दो बार भाग देने की शर्त हो।

(C) योग - अन्तर पर प्रश्न

II भाग के घातांकीय भाग पर =

(A) सूत्र पर प्रश्न

(B) घातांकीय योग के भाग पर

(C) - शेषफल प्रमेय पर प्रश्न

(D) - विभाज्यता की शर्त पर प्रश्न

(E) - भाग के गुणनखण्ड विधि पर प्रश्न $\left[\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right]$

4. सही - गलत प्रश्न की संख्या ज्ञात करना

5. जानवरों पर प्रश्न $\left[\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right]$

6. दस्तमिलाप पर प्रश्न

२

7. शून्यकों की संख्या ज्ञात करना।

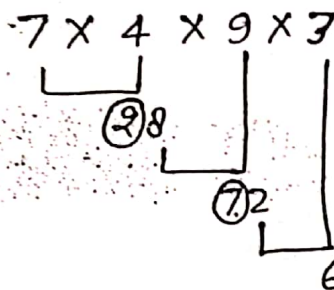
8. अंको से संख्या बनाना।

9. संख्याओं को लिखने में अंको की आवश्यकता।

1. इकाई का अंक ज्ञात करना =

(i) गुणनफल में इकाई का अंक ज्ञात करना =

Q. $267 \times 5384 \times 599 \times 73$ के गुणनफल में इकाई का अंक ज्ञात कीजिए।

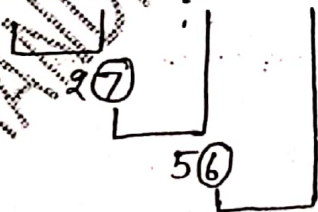


इकाई अंक = 6
Ans

Q. $2683 \times 5\# \times 6459 \times 58$ के गुणनफल में इकाई का अंक '4' है तो # का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए?

$$3 \times \# \times 9 \times 8$$

$$3 \times 9 \times 8 \times \# \rightarrow 4 \text{ या } 9$$



का min value $\rightarrow 4$
Ans

Q. $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \dots \times 197$ के गुणनफल में इकाई का अंक = ?

इकाई = 0

Note = समस्त विषम संख्याओं के गुणनफल में इकाई का अंक '5' तथा समस्त सम संख्याओं के गुणनफल में इकाई का अंक 'शून्य' होता है।

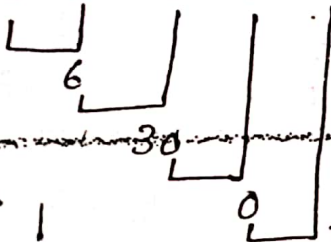
Q 35 X 77 X 39 X ... X 999 संख्याओं के गुणनफल में इकाई का अंक = ?

इकाई का अंक = 0

Note - समस्त अभाज्य संख्याओं के गुणनफल में इकाई का अंक '0' होता है।

Q समस्त अभाज्य संख्याओं के गुणनफल में इकाई का अंक ज्ञात कीजिए?

2 X 3 X 5 X 7 X 11

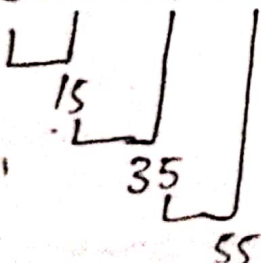


इकाई का अंक = 0

Note = विषम अभाज्य संख्याओं के गुणनफल में इकाई का अंक '5' होता है।

Q विषम अभाज्य संख्याओं के गुणनफल में इकाई का अंक ज्ञात कीजिए।

3 X 5 X 7 X 11



∴ इकाई का अंक = 5

घात के इकाई का अंक ज्ञात करना =

(आधार में इकाई का अंक) $\frac{\text{घात का शेष}}{4}$

Q $(582)^{176}$ में इकाई का अंक ज्ञात कीजिए?

$$= (2)^{\frac{176}{4}}$$

$$= (2)^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

16

∴ इकाई का अंक = 6

Note =

$$\text{Imp } 0 \times 0 \times 0 \times 0 \text{ ---- } \times 0 = 0$$

$$1 \times 1 \times 1 \times 1 \text{ ---- } \times 1 = 1$$

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \text{ ---- } \times 5 = 5$$

$$6 \times 6 \times 6 \times 6 \text{ ---- } \times 6 = 6$$

ऐसे प्रश्नों में यदि आधार में 0, 1, 5, 6 संख्या आये तो इकाई का अंक क्रमशः 0, 1, 5, 6 ही आयेगा।

Note =

Imp अगर घात में संख्या में 4 से भाग देने पर '0' प्राप्त हो तो उसके स्थान पर हम 4 लगा देते हैं न कि शून्य।

Q $(5782)^{38} - (186)^{30}$ में इकाई का अंक = ?

$$\begin{aligned} & (2)^{\frac{38}{4} \text{ का शेष}} - (6)^{30} \\ &= (2)^2 - 6 \\ &= 4 - 6 \\ &= 8 \end{aligned}$$

(iii) Factorial पदों में इकाई का अंक =

Note =

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Note = यदि आधार में 5 या उससे अधिक हो तो इकाई का अंक सदैव शून्य होगा।

Q $117!$ में इकाई का अंक ज्ञात कीजिए

$$\text{इकाई का अंक} = 0$$

यदि आधार Factorial में हो तथा घात सामान्य हो-

Q $(39!)^{37}$ में इकाई का अंक ज्ञात कीजिए

$$\text{इकाई का अंक} = 0$$

Q $(4!)^{74}$ में इकाई का अंक ज्ञात कीजिए

$$= (24)^{74} \quad [\because 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24]$$

$$= (24)^{\frac{74}{4} \text{ का शेष}}$$

$$= (4)^{\frac{74}{4} \text{ का शेष}}$$

$$= (4)^2$$

$$= 4 \times 4 = 16$$

$$\text{इकाई का अंक} = 6$$

यदि आधार के घात दोनों Factorial में हो-

Note = यदि घात $4!$ से ऊपर हो तो घात सदैव 4 से विभक्त होगा।

Q $(237)^{19!}$ में इकाई का अंक = ?

$$= (7)^4$$

$$= 7 \times 7 \times 7 \times 7$$

$$= 49 \times 7 \times 7$$

$$= 9 \times 7 \times 7$$

$$= 63 \times 7$$

$$= 441 \quad \text{इकाई का अंक} = 1$$

Q $(213)^{3!}$ में इकाई का अंक ज्ञात कीजिए

$$= (3)^{3 \times 2 \times 1}$$

$$= (3)^6$$

$$= (3)^{\frac{6}{4} \text{ का शेष}}$$

$$= (3)^2 = 3 \times 3$$

$$= 9$$

$$\text{इकाई का अंक} = 9$$

Q (518 L)^{2439!} में इकाई का अंक?

इकाई का अंक = 0

गुणनखण्ड (Factorisation) =

कोई संख्या जिस किसी संख्या से विभक्त होता है, उस संख्या के गुणनखण्ड कहलाते हैं, जिसमें-

⇒ '1' प्रत्येक संख्या का गुणनखण्ड होता है।

⇒ 'संख्या' स्वयं का एक गुणनखण्ड होता है।

⇒ संख्या '1' को छोड़कर प्रत्येक संख्या के कम से कम दो गुणनखण्ड होते हैं।

⇒ प्रत्येक संख्या के अनन्त गुणनखण्ड होते हैं।

⇒ संख्या स्वयं का एक गुणनखण्ड होता है।

(i) कुल गुणनखण्डों / भाजकों की संख्या
ज्ञात करना =

Q 120 में कुल गुणनखण्डों की संख्या बताइए?

$$120 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10,$$

$$12, 15, 20, 24, 30, 40, 60,$$

$$120$$

Alternate method (वैकल्पिक विधि)

अभाज्य गुणनखण्ड

$$\begin{array}{r|l} 2 & 120 \\ 2 & 60 \\ 2 & 30 \\ 3 & 15 \\ 5 & 5 \\ & 1 \end{array}$$

$$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$

(i) कुल गुणनखण्ड = $(3+1) \times (1+1) \times (1+1)$

$$= 4 \times 2 \times 2$$

$$= 16$$

(ii) विषम गुणनखण्ड = $(1+1) \times (1+1)$

$$= 2 \times 2$$

$$= 4$$

(iii) सम गुणनखण्ड = $3 \times (1+1) \times (1+1)$

$$= 3 \times 2 \times 2$$

$$= 12$$

Q 64 में कुल गुणनखण्ड की संख्या = ?

$$\begin{array}{r|l} 2 & 64 \\ 2 & 32 \\ 2 & 16 \\ 2 & 8 \\ 2 & 4 \\ 2 & 2 \\ & 1 \end{array}$$

$$64 = 2^6$$

कुल गुणनखण्ड = $(6+1) = 7$

विषम गुणनखण्ड = 1

सम गुणनखण्ड = 6

4

Q 135 में कुल गुणनखण्डों की संख्या = ?

$$\begin{array}{r|l} 3 & 135 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$135 = 3^3 \times 5^1$$

$$\begin{aligned} \text{कुल गुणनखण्ड} &= (3+1) \times (1+1) \\ &= 4 \times 2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\text{कुल विषम गुणनखण्ड} = 8$$

$$\text{कुल सम गुणनखण्ड} = 0$$

(ii) कुल गुणनखण्डों का योग ज्ञात करना =

Q 120 में कुल गुणनखण्डों का योग बताइए?

$$\begin{array}{r|l} 2 & 120 \\ \hline 2 & 60 \\ \hline 2 & 30 \\ \hline 3 & 10 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$

कुल गुणनखण्डों का योग =

$$\begin{aligned} & (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3) \times (3^0 + 3^1) \times (5^0 + 5^1) \\ &= (1 + 2 + 4 + 8) \times (1 + 3) \times (1 + 5) \\ &= (15) \times (4) \times (6) \\ &= 60 \times 6 = 360 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{कुल विषमखण्डों का योग} &= (3^0 + 3^1) \times (5^0 + 5^1) \\ &= (1 + 3) \times (1 + 5) \\ &= 4 \times 6 = 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{कुल सम गुणनखण्डों का योग} &= (2^1 + 2^2 + 2^3) \times (3^0 + 3^1) \times (5^0 + 5^1) \\ &= (2 + 4 + 8) \times (1 + 3) \times (1 + 5) \\ &= 14 \times 4 \times 6 \\ &= 14 \times 24 \\ &= 336 \end{aligned}$$

Q 32 में कुल गुणनखण्डों का योग बताइए?

$$\begin{array}{r|l} 2 & 32 \\ \hline 2 & 16 \\ \hline 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$32 = 2^5$$

कुल गुणनखण्डों का योग =

$$\begin{aligned} &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) \\ &= (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32) \\ &= 63 \end{aligned}$$

कुल विषमखण्डों का योग =

$$= (1)$$

सम गुणनखण्डों का योग =

$$\begin{aligned} &= (2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) \\ &= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 \end{aligned}$$

Q 135 में कुल गुणनखण्डों का योग बताइए ?

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 135} \\ 3 \overline{) 45} \\ 3 \overline{) 15} \\ 5 \overline{) 5} \\ 1 \end{array}$$

$$135 = 3^3 \times 5^1$$

कुल गुणनखण्डों का योग -

$$\begin{aligned} &= (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) \times (5^0 + 5^1) \\ &= (1 + 3 + 9 + 27) \times (1 + 5) \\ &= (40) \times 6 \\ &= 240 \end{aligned}$$

सम गुणनखण्डों का योग = 0

विषम गुणनखण्डों का योग = 240

(iii) अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या
ज्ञात करना -

Q 1080 में कुल अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या बताइए ?

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 1080} \\ 2 \overline{) 540} \\ 2 \overline{) 270} \\ 3 \overline{) 135} \\ 3 \overline{) 45} \\ 3 \overline{) 15} \\ 5 \overline{) 5} \\ 1 \end{array}$$

$$1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5^1$$

(i) कुल अभाज्य गुणनखण्डों की सं०

$$= 3 + 3 + 1 = 7$$

(ii) भिन्न प्रकार के अभाज्य गुणनखण्डों की सं०

$$= 3 \quad [2, 3, 5]$$

(iii) सम अभाज्य गुणनखण्डों की सं०

$$= 3 \quad [2^3]$$

(iv) विषम अभाज्य गुणनखण्डों की सं०

$$= 3 + 1 = 4 \quad [3^3 \times 5^1]$$

Q $(12)^2 \times (15)^3 \times 35$ में कुल अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या ज्ञात कीजिए।

$$= (2 \times 2 \times 3)^2 \times (3 \times 5)^3 \times (5 \times 7)$$

$$= 2^2 \times 2^2 \times 3^2 \times 3^3 \times 5^3 \times 5^1 \times 7^1$$

$$= 2^4 \times 3^5 \times 5^4 \times 7^1$$

कुल अभाज्य गुणनखण्डों की सं०

$$= 4 + 5 + 4 + 1$$

$$= 14$$

भिन्न प्रकार के गुणनखण्डों की सं०

$$= 4 \quad (2, 3, 5, 7)$$

सम अभाज्य गुणनखण्डों की सं०

$$= 4 \quad [2^4]$$

विषम अभाज्य गुणनखण्डों की सं०

$$= 5 + 4 + 1$$

$$= 10 \quad [3^5 \times 5^4 \times 7^1]$$

विभाज्य (Division) =

[1] भाग के लम्बी विधि पर प्रश्न :-

स्वर पर प्रश्न =

भाजक) भाज्य (भागफल
Divisor Divident Quotient
§
+ शेषफल
(Remainder)

$$\boxed{\text{भाज्य} = \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेष}}$$

Q 5089 में कौन सी संख्या से

भाग दें कि भागफल 121 तथा

शेषफल 7 बचे ?

$$\text{भाज्य} = \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेष}$$

$$5089 = x \times 121 + 7$$

$$5082 = 121x$$

$$x = \frac{5082}{121} = 42$$

$$x = 42$$

$$\boxed{\text{भाजक} = 42}$$

Q दो संख्याओं का अन्तर 1365 है,

जब बड़ी संख्या से छोटी संख्या से भाग दिया जाता है, तो भागफल 7 तथा शेषफल 15 बचता है, तो उनमें से छोटी सं० क्या है।

माना छोटी सं० = x

बड़ी सं० = $x + 1365$

$$x \overline{) x + 1365} \begin{array}{r} 7 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{भाज्य} = \text{भागफल} \times \text{भाजक} + \text{शेष}$$

$$(x + 1365) = 7x + 15$$

$$x + 1350 = 7x$$

$$1350 = 6x$$

$$x = \frac{225 \times 1350}{6}$$

$$x = 225$$

$$\text{छोटी सं०} = 225 \text{ Ans}$$

Q भाग के एक प्रश्न में भाजक, भागफल का 5 गुना तथा शेषफल का 4 गुना है, यदि शेषफल 45 हो तो भाज्य बताइये?

$$\text{भाजक} = \text{भागफल} \times 5$$

$$\text{भाजक} = \text{शेषफल} \times 4$$

$$= 45 \times 4$$

$$\text{भाजक} = 180$$

$$\text{भागफल} = \frac{36}{180} = 36$$

$$\text{भाज्य} = 180 \times 36 + 45 = 6525 \text{ Ans}$$

(B) जब प्रश्न में दो बार भाग देने की शर्त हो =

पहचान = ऐसे प्रश्न में पहला भाजक सदैव दूसरे भाजक से विभक्त होता है और इस प्रकार के प्रश्न में सदैव दूसरे स्थिति का शेषफल प्रदा जाता है।

नियम = दूसरी स्थिति का शेषफल ज्ञात करने के लिए, पहले शेषफल में दूसरे भाजक से भाग देते हैं।

Q किसी सं० में 69 से भाग देने पर शेषफल 35 बचता है, यदि इसी सं० में 23 से भाग दिया जाय, तो शेषफल कितना बचेगा?

$$\begin{array}{r} 69 \overline{) \text{संख्या}} \\ \underline{} \\ 35 \text{ शेष} \end{array} \quad \begin{array}{r} 23 \overline{) \text{संख्या}} \\ \underline{} \\ \boxed{12} \text{ शेष} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \overline{) 35} \\ \underline{23} \\ 12 \end{array}$$

∴ शेषफल = 12 Ans

Note = यदि ऐसे प्रश्नों में संख्या के n गुने, या संख्या के वर्ग या संख्या के घन में भाग देने की बात की जाये

तो ठीक क्रिया पहले शेष के साथ करके दूसरे भाजक से भाग दे देते हैं।

Q किसी संख्या n में 240 से भाग देते हैं, तो शेषफल 11 बचता है, तो n^2 में 15 से भाग देने पर शेषफल कितना बचेगा?

$$n^2 = (11)^2 = 121$$

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) 121} \\ \underline{120} \\ 1 \end{array}$$

शेष = 1

(C) योग-अन्तर पर प्रश्न =

घटायी जाने वाली सं० = शेषफल
जोड़ी जाने वाली सं० = भाजक - शेष

Q 4707 में वह कौन सी छोटी संख्या जोड़ दी जाए कि यह 42 से पूर्णतः विभक्त हो जाए?

$$\begin{array}{r} 42 \overline{) 4707} \quad (112 \\ \underline{42} \\ \times 50 \\ \underline{42} \\ \times 87 \\ \underline{84} \\ \times 3 \end{array}$$

$$\therefore \text{जोड़ी जाने वाली सं०} = 42 - 3 = 39$$

Q चार अंको की वह अधिकतम सं० बताइए जो 216 से पूर्णतः विभक्त हो जाए?

$$\begin{array}{r} 216 \overline{) 9999} \quad (46 \\ \underline{864} \\ 1359 \\ \underline{1296} \\ 63 \end{array}$$

$$\therefore \text{घटायी जाने वाली सं०} = 63$$

अधिकतम
वह सं० जो 216 से पूर्णतः होगी। $9999 - 63 = 9936$ Ans

Q 5 अंको की वह -युनतम संख्या बताइए जो 72 से पूर्णतः विभक्त हो जाए?

$$\begin{array}{r} 72 \overline{) 10000} \quad (138 \\ \underline{72} \\ 280 \\ \underline{216} \\ \times 640 \\ \underline{576} \\ 64 \end{array}$$

$$\text{जोड़ी जाने वाली सं०} = 72 - 64 = 8$$

$$\therefore \text{वह सं०} = 10000 + 8 = 10008$$

Q 6753 के निकटतम वह संख्या बताइए जो 45 से पूर्णतः विभक्त हो जाये।

$$\begin{array}{r} 45 \overline{) 6753} \quad (150 \\ \underline{45} \\ 225 \\ \underline{225} \\ \times \times \times 3 \\ 0 \\ 3 \end{array}$$

$$\therefore \text{घटायी जाने वाली सं०} = 3$$

$$\therefore 6753 - 3 = 6750 \text{ Ans}$$

विभाष्य [2] वातांकीय भाग पर प्रश्न =

(A) सूत्र पर प्रश्न =

(a) $a^n + b^n$ में यदि n विषम हो तो,
इसका एक गुणनखण्ड निश्चित
रूप से $(a+b)$ होगा।

स्पष्टीकरण :- $a^3 + b^3$
 $= (a+b)(a^2 + b^2 + ab)$

(b) $a^n - b^n$ में यदि n विषम हो तो,
इसका एक गुणनखण्ड निश्चित रूप
से $(a-b)$ होगा।

स्पष्टीकरण =

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab)$$

(c) $a^n - b^n$ में यदि n सम हो तो,
इसके निम्न दो गुणनखण्ड $(a-b)$ व
 $(a+b)$ होगा।

स्पष्टीकरण =

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Q $(35^{47} + 11^{47})$ निम्न में से किस
संख्या से सदैव विभक्त होगा -

- (a) 2
(b) 13
(c) 23
(d) ~~a व c दोनों से~~

Solⁿ
 $(35^{47} + 11^{47})$

उपर्युक्त सं० का एक गुणनखण्ड
 $(35+11)$ या 46 है, अतः
संख्या 46 से पूर्णतः विभक्त होगा।

Q $(3^{41} + 7^{82})$ निम्न में से किस
संख्या से सदैव विभक्त होगा?

- (a) 2
(b) 13
(c) ~~a व b से~~
(d) ~~None~~

$$(3^{41} + 7^{82})$$

$$= [3^{41} + (7^2)^{41}]$$

$$= (3^{41} + 49^{41})$$

उपर्युक्त सं० का एक गुणनखण्ड
 $(3+49) = 52$ है, अतः सं०
संख्या 52 से पूर्णतः विभक्त होगा।

Q 7¹⁵ से एक कम निम्न में से किस संख्या से सदैव विभक्त होगा -

$$= 7^{15} - 1$$

$$= 7^{15} - 1^{15}$$

अपर्युक्त सं० का एक गुणनखण्ड

$$(7-1) = 6 \text{ है, अतः सं० सदैव}$$

6 से पूर्णतः विभक्त होगा।

विभाज्य [II] - घातांकीय भाग पर प्रश्न

(B) घातांकीय योग के भाग पर प्रश्न

Q $(3^{41} + 3^{42} + 3^{43} + 3^{44})$ निम्न में से किस संख्या से विभक्त होगा?

- (a) 2
- (b) 5
- (c) 9
- ☒ (d) सभी से

Solⁿ $(3^{41} + 3^{42} + 3^{43} + 3^{44})$

$$= 3^{41}(1 + 3^1 + 3^2 + 3^3)$$

$$= 3^{41}(1 + 3 + 9 + 27)$$

$$= 3^{41} \times 40 \text{ संख्या के गुणनखण्ड है।}$$

Q $(4^{26} + 4^{27} + 4^{28} + 4^{29})$ निम्न से किस संख्या से विभक्त होगा -

- (a) 19 से
- ☒ (b) 10 से
- (c) 29 से
- (d) 53 से

$$(4^{26} + 4^{27} + 4^{28} + 4^{29})$$

$$= 4^{26} [1 + 4 + 4^2 + 4^3]$$

$$= 4^{26} [1 + 4 + 16 + 64]$$

$$= 4^{26} [85]$$

$$= 4^{26} \times 85 \text{ संख्या का गुणनखण्ड}$$

$$= 4^{25} \times 4 \times 85$$

$$= 4^{25} \times 340$$

विभाज्य : II - वातांकीय भाग पर प्रश्न

(C) शेषफल प्रमेय पर प्रश्न = (V. Imp)

Q 39^{85} को 38 से भाग देने पर शेष क्या होगा?

$$\begin{aligned} \frac{(39)^{85}}{38} &= (1)^{85} \\ &= 1 \text{ (शेष)} \end{aligned}$$

Note = यदि शेषफल ऋणात्मक आये

Imp तो अभीष्ट शेष = भाजक - Neg शेष

Q $(63)^{97}$ को 64 से भाग देने पर शेष क्या बचेगा?

$$\begin{aligned} \frac{(63)^{97}}{64} &= (-1)^{97} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{अभीष्ट शेष} &= 64 - 1 \\ &= 63 \text{ Ans} \end{aligned}$$

Q $(87^{96} + 20)$ को 88 से भाग देने पर शेष क्या बचेगा?

$$\frac{(87)^{96} + 20}{88}$$

$$= 1 + (-68)$$

$$= -67$$

$$\text{अभीष्ट शेष} = 88 - 67$$

$$= 21 \text{ Ans}$$

दूसरी विधि =

$$\frac{(87)^{96} + 20}{88}$$

$$= 1 + 20 = 21 \text{ (शेष) Ans}$$

Q $(66^{35} - 37)$ को 65 से भाग देने पर शेष क्या बचेगा?

$$\frac{(66)^{35} - 37}{65}$$

$$\text{शेष} = 1 - 37 = -36$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{अभीष्ट शेष} &= 65 - 36 \\ &= 29 \text{ Ans} \end{aligned}$$

Q $(2)^{48}$ को 7 से भाग देने पर शेष क्या बचेगा?

$$\frac{(2)^{48}}{7} = \frac{(2^3)^{16}}{7}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(8)^{16}}{7} = (1)^{16} \\ &= 1 \text{ (शेष)} \end{aligned}$$

विभाज्य : II - दातांकिय भाग पर प्रश्न

(C) शेषफल प्रमेय पर प्रश्न = (V. Imp)

Q 39^{85} को 38 से भाग देने पर शेष क्या होगा?

$$\begin{aligned} \frac{(39)^{85}}{38} &= (1)^{85} \\ &= 1 \text{ (शेष)} \end{aligned}$$

Note = यदि शेषफल ऋणात्मक आये
Imp तो अग्रणी शेष = भाजक - Neg शेष

Q $(63)^{97}$ को 64 से भाग देने पर शेष क्या बचेगा?

$$\begin{aligned} \frac{(63)^{97}}{64} &= (-1)^{97} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{अग्रणी शेष} &= 64 - 1 \\ &= 63 \text{ Ans} \end{aligned}$$

Q $(87^{96} + 20)$ को 88 से भाग देने पर शेष क्या बचेगा?

$$\frac{(87)^{96} + 20}{88}$$

$$= 1 + (-68)$$

$$= -67$$

$$\begin{aligned} \text{अग्रणी शेष} &= 88 - 67 \\ &= 21 \text{ Ans} \end{aligned}$$

दूसरी विधि =

$$\frac{(87)^{96} + 20}{88}$$

$$= 1 + 20 = 21 \text{ (शेष) Ans}$$

Q $(66^{35} - 37)$ को 65 से भाग देने पर शेष क्या बचेगा?

$$\frac{(66)^{35} - 37}{65}$$

$$\text{शेष} = 1 - 37 = -36$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{अग्रणी शेष} &= 65 - 36 \\ &= 29 \text{ Ans} \end{aligned}$$

Q $(2)^{48}$ को 7 से भाग देने पर शेष क्या बचेगा?

$$\frac{(2)^{48}}{7} = \frac{(2^3)^{16}}{7}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(8)^{16}}{7} = (1)^{16} \\ &= 1 \text{ (शेष)} \end{aligned}$$

Q (2)⁴⁷ को 7 से भाग देने पर शेष क्या बचेगा?

$$(2^3)^{15} \times 2^2$$

$$= \frac{(2^3)^{15} \times 2^2}{7}$$

$$= (1)^{15} \times 4$$

$$= 1 \times 4 = 4 \text{ Ans}$$

$$\text{शेष} = 4$$

Q 3¹⁹⁸⁹ को 7 से भाग देने पर शेष क्या बचेगा?

$$\frac{(3)^{1989}}{7} = \frac{(3)^{663}}{7}$$

$$= \frac{(27)^{663}}{7}$$

$$= (-1)^{663} = -1$$

$$\therefore \text{अग्रणी शेष} = 7 - 1 = 6$$

विभाज्यता की शर्त पर प्रश्न =

2 से विभाज्यता - इकाई का अंक सम हो तो वह संख्या पूर्णतः 2 से विभाज्य होगा।

3 से विभाज्यता = यदि दी गई संख्या के समस्त अंकों का योग 3 से विभक्त हो तो पूरी संख्या 3 से विभाज्य होगा।

4 से विभाज्यता = यदि दी गई संख्या के इकाई व दहाई का अंक शून्य हो अथवा इकाई व दहाई के अंक से बनी संख्या 4 से विभक्त हो तो पूरी संख्या 4 से विभक्त होगी।

5 से विभाज्यता - यदि दी गई संख्या की इकाई का अंक 0, 5 हो तो वह संख्या 5 से पूर्णतः विभक्त होगा।

6 से विभाज्यता = यदि दी गई संख्या 2 और 3 दोनों से विभाज्यता की शर्त का पालन करे तो पूरी संख्या 6 से पूर्णतः विभक्त होगी।

9 से विभाज्यता =

यदि दी गई संख्या के समस्त अंको का योग 9 से विभक्त हो तो पूरी संख्या 9 से विभाजित होगी।

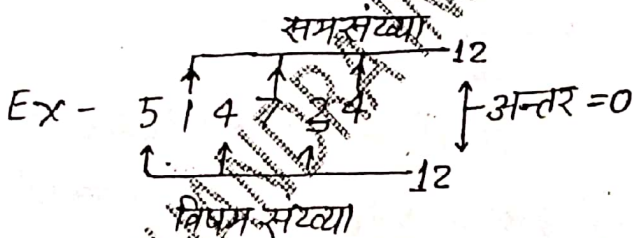
Ex - 5143725

$$= 5 + 1 + 4 + 3 + 7 + 2 + 5$$

$$= 27$$

11 से विभाज्यता =

यदि दी गई संख्या के सम स्थानों के अंको के योग और विषम स्थानों के अंको के योग का अन्तर '0' हो या 11 से विभक्त हो तो पूरी संख्या 11 से विभाजित होगी।



3. विभाज्यता (E) भाग के गुणनखण्ड विधि पर प्रश्न =

(A) सिद्धान्त :-

$$\text{कुल शेष} = \text{I शेष} + \text{II शेष} \times \text{I भाजक} + \text{III शेष} \times \text{I भाजक} \times \text{II भाजक}$$

Q किसी संख्या में उत्तरोत्तर 3, 5 व 7 से भाग देने पर शेषफल क्रमशः 1, 2 व 4 बचता है, तो वह न्यूनतम संख्या बताइए?

Ans = न्यूनतम संख्या के लिए अन्तिम भागफल सदैव 1 होता है।

भाजक →	3x	5x	7x
	+ ↓	+ ↓	+ ↓
शेष →	1	2	4
	172	52	11

$$\therefore \text{संख्या} = 172 \text{ Ans}$$

Q किसी संख्या में उत्तरोत्तर 3, 5 व 11 से भाग देने पर शेषफल क्रमशः 2, 4 व 6 बचता है, यदि अन्तिम भागफल 5 हो तो वह संख्या बताइए?

$$\begin{array}{r}
 \text{भाजक} \rightarrow 3 \times 5 \times 11 \times 5 \\
 \text{शेष} \rightarrow \begin{array}{r} +\downarrow \quad +\downarrow \quad +\downarrow \\ 2 \quad 4 \quad 6 \\ \hline 929 \quad 309 \quad 61 \end{array}
 \end{array}$$

$\therefore$ संख्या = 929 है। Ans

- Q किसी संख्या में उत्तरोत्तर 5, 7 व 11 से भाग देने पर शेषफल क्रमशः 1, 5 व 6 बचता है यदि अन्तिम भागफल 4 हो तो वह संख्या बताइये?

$$\begin{array}{r}
 \text{भाजक} \rightarrow 5 \times 7 \times 11 \times 4 \\
 \text{शेष} \rightarrow \begin{array}{r} +\downarrow \quad +\downarrow \quad +\downarrow \\ 1 \quad 5 \quad 6 \\ \hline 1776 \quad 355 \quad 50 \end{array}
 \end{array}$$

$$\text{सं०} = 1776$$

- Q किसी संख्या में उत्तरोत्तर 5, 7 व 11 से भाग देने पर शेषफल क्रमशः 2, 4 व 6 बचता है तो-

- कुल शेषफल बताइये?
- यदि उसी संख्या में 385 से भाग दे तो शेष कितना बचेगा?
- यदि भाजक का क्रम उल्टा कर दे तो कुल शेष कितना होगा?
- भाजक का क्रम उल्टा करने पर शेष क्रमशः कितना बचेगा?

$$\begin{array}{r}
 \text{भाजक} \rightarrow 5 \times 7 \times 11 \\
 \text{शेष} \rightarrow \begin{array}{r} +\downarrow \quad +\downarrow \quad +\downarrow \\ 2 \quad 4 \quad 6 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(i) कुल शेषफल} &= 2 + 4 \times 5 + 6 \times 5 \times 7 \\
 &= 2 + 20 + 210 \\
 &= 232
 \end{aligned}$$

- (ii) यदि उसी संख्या में $(5 \times 7 \times 11) = 385$ लम्बी विधि से भाग दे तो भी शेष 232 ही होगा।

- (iii) भाजक का क्रम उल्टा करने पर कुल शेष पर कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा अर्थात् कुल शेष 232 ही होगा।

$$\begin{array}{r}
 \text{(iv) भाजक} \rightarrow 5 \times 7 \times 11 \\
 \text{शेष} \rightarrow \begin{array}{r} +\downarrow \quad +\downarrow \quad +\downarrow \\ 2 \quad 4 \quad 6 \\ \hline 617 \quad 123 \quad 17 \end{array}
 \end{array}$$

$$\text{सं०} = 617$$

$\therefore$ भाजक का उल्टा करने पर शेष -

$$\begin{array}{r|rr}
 11 & 617 & \text{शेष} \\
 7 & 56 & 1 \\
 5 & 8 & 0 \\
 & 1 & 3
 \end{array}$$

$\therefore$ शेष क्रमशः 1, 0 व 3 बचेगा।

योग पर बनने वाले प्रश्न =

1. प्राकृतिक संख्या के योग पर प्रश्न
2. प्राकृतिक संख्या के वर्गों के योग पर
3. प्राकृतिक संख्या के घनों के योग पर
4. त्रिनात्मक योग पर प्रश्न $\begin{cases} \rightarrow A \\ \rightarrow B \end{cases}$

1. प्राकृतिक संख्या के योग पर प्रश्न =

जब संख्या समान्तर श्रेणी/नियमित अन्तराल

में हो =
(A) जब योग ज्ञात करना हो -
(B) जब योग ज्ञात हो -

(A) जब योग ज्ञात करना हो =

$$\text{योग} = \frac{(\text{प्रथम पद} + \text{अन्तिम पद}) \times \text{कुल पद}}{2}$$

जब नियमित अन्तराल (A.P.) में हो -

- Ex =
- ⇒ प्राकृतिक संख्या = 1, 2, 3, 4, ...
 - * सम संख्या = 2, 4, 6, 8, ...
 - * विषम संख्या = 1, 3, 5, 7, ...
 - * गुणज संख्या = 25, 50, 75, 100, ...
 - * अन्य श्रृंखला = 7, 17, 27, ...

Q प्रथम 130 क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं का योग बताइए?

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 130$$

$$\begin{aligned} \text{योग} &= \frac{(1 + 130) \times 130}{2} \\ &= 131 \times 65 \\ &= 8515 \end{aligned}$$

$$\text{Q } 66 + 67 + 68 + 69 + \dots + 190 \text{ का योग ज्ञात कीजिए}$$

$$\begin{aligned} \text{योग} &= \frac{(66 + 190) \times (190 - 65)}{2} \\ &= \frac{128}{2} \times 125 \\ &= 128 \times 125 \\ &= 16000 \end{aligned}$$

Q 45 के प्रथम 30 गुणजों का योगफल बताइए?

$$45 + 90 + 135 + \dots + 1350$$

$$\begin{aligned} \text{योग} &= \frac{(45 + 1350) \times 15}{2} \\ &= 1395 \times 15 \\ &= 20925 \end{aligned}$$

Q 1-2+3-4+5-6+7-8+...-99+100 का मान = ?

$$\begin{aligned} &1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots - 99 + 100 \\ &= -1 \times 50 \quad (\because \text{ऐसे कुल 50 जोड़ें बनेंगे}) \\ &= -50 \text{ Ans} \end{aligned}$$

(B) जब योग ज्ञात हो = सम/विषम

सम $(x) \rightarrow (x+2), (x+4), (x+6) \dots$

विषम $(x) \rightarrow (x+2), (x+4), (x+6) \dots$

Q किसी 5 क्रमागत विषम संख्याओं का योगफल 415 है, तो इनमें से सबसे बड़ी संख्या बताइए?

$$(x) + (x+2) + (x+4) + (x+6) + (x+8) = 415$$

$$\Rightarrow 5x + 20 = 415$$

$$5x = 395$$

$$x = \frac{395}{5} = 79$$

$$x = 79$$

$$\therefore \text{बड़ी संख्या} = (x+8) \\ = 79+8 \\ = 87 \text{ Ans}$$

दूसरी विधि =

मध्यपद

79 81 83 85 87

विषम विषम विषम विषम विषम

$$\text{मध्यमान} = \frac{415}{5} = 83$$

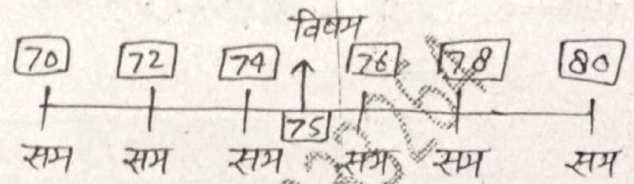
$$= 83$$

$$\text{मध्यमान} = \frac{\text{कुल पदों का योग}}{\text{कुल पदों की सं०}}$$

$$\therefore \text{सबसे बड़ी सं०} = 87$$

Q किसी 6 क्रमागत सम सं० का योग

450 है, तो इनमें से सबसे बड़ी संख्या बताइए?



$$\text{मध्यमान} = \frac{75}{2} = 37.5$$

$$\therefore \text{सबसे बड़ी सं०} = 80$$

योग धर प्रश्न =

② प्राकृतिक संख्या के वर्गों के योग पर =

Note:-

प्रथम n क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं के,

$$\text{वर्गों का योग} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

↓

$$Ex = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

③ प्रथम 30 क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग बताइए?

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 30^2$$

$$\text{वर्गों का योग} = \frac{30(30+1)(2 \times 30+1)}{6}$$

$$= \frac{5}{6} \times 31 \times 61$$

$$= 155 \times 61$$

$$= 9455$$

④ $16^2 + 17^2 + 18^2 + \dots + 30^2$ का मान = ?

$$\text{Sol}^n = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 30^2) - (1^2 + 2^2 + \dots + 15^2)$$

$$= \frac{15}{6} \times (30+1)(2 \times 30+1) - \frac{15}{6} \times (15+1)(2 \times 15+1)$$

$$= 15 \times 31 \times 61 - \frac{15 \times 16 \times 31}{2}$$

$$= 9455 - 40 \times 31$$

$$= 9455 - 1240 = 8215 \text{ Ans}$$

$$\text{⑤ } 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 40^2 \text{ का मान}$$

$$= 2^2 [1 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2]$$

$$= 4 \left[\frac{20(20+1)(2 \times 20+1)}{6} \right]$$

$$= 4 \left[\frac{20 \times 21 \times 41}{6} \right]$$

$$= 4 [70 \times 41]$$

$$= 4 [2870]$$

$$= 11480$$

दूसरी विधि =

Trick = अन्तिम पद से लगातार 3 पद रखकर गुणा करें व 6 से भाग दें-

$$= \frac{40 \times 41 \times 42}{6}$$

$$= 11480$$

⑥ $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + 29^2$ का मान

$$= \frac{29 \times 30 \times 31}{6}$$

$$= 29 \times 155$$

$$= 4495$$

Q यदि $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 385$
तो $5 + 20 + 45 + 80 + \dots + 500 = ?$

Solⁿ

$$5 + 20 + 45 + 80 + \dots + 500$$

$$= 5 [1 + 4 + 9 + 16 + \dots + 100]$$

$$= 5 [1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 10^2]$$

$$= 5 \times 385$$

$$= 1925 \text{ Ans}$$

Q यदि $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2 = 285$
हो तो $(0.11)^2 + (0.22)^2 + (0.33)^2 + \dots + (0.99)^2 = ?$

$$= (0.11)^2 + (0.22)^2 + (0.33)^2 + \dots + (0.99)^2$$

$$= (0.11)^2 [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2]$$

$$= (0.11)^2 \times 285$$

$$= 0.0121 \times 285$$

$$= 3.4485$$

* योग पर बने वाला प्रश्न =

[3] प्राकृतिक संख्या के घनों के योग पर प्रश्न =

Note =

प्रथम n क्रमागत प्राकृतिक संख्या के,

घनों का योग $= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ होता है।

Q प्रथम 20 क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग बताइए?

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 20^3$$

$$\Rightarrow \text{घनों का योग} = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$= \left[\frac{20(20+1)}{2} \right]^2$$

$$= \left[\frac{20 \times 21}{2} \right]^2$$

$$= (210)^2$$

$$= 44100$$

Q $11^3 + 12^3 + 13^3 + \dots + 20^3$ का मान = ?

$[1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 20^3] - [1^3 + 2^3 + \dots + 10^3]$

$= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

$= \left[\frac{20(20+1)}{2} \right]^2 - \left[\frac{10(10+1)}{2} \right]^2$

$= [10(21)]^2 - [5 \times 11]^2$

$= [100 \times 441] - [25 \times 121]$

$= 44100 - 3025$

$= 41075$

Q यदि $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = 3025$

तो $4 + 32 + 108 + \dots + 4000 = ?$

$= 4 + 32 + 108 + \dots + 4000$

$= 4[1 + 8 + 27 + \dots + 1000]$

$= 4[1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3]$

$= 4[3025]$

$= 12100$ Ans

Q यदि $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3 = 2025$ हो

तो $(0.11)^3 + (0.22)^3 + (0.33)^3 + \dots + (0.99)^3 = ?$

$= (0.11)^3 + (0.22)^3 + (0.33)^3 + \dots + (0.99)^3$

$= (0.11)^3 [1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3]$

$= 0.001331 \times 2025$

$= 2.695275$

योग पर करने वाला प्रश्न =

4-भिन्नात्मक योग पर प्रश्न - (A)

Pattern: $\boxed{a \frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}}$

Q $1\frac{1}{2} + 11\frac{1}{2} + 111\frac{1}{2} + 1111\frac{1}{2}$ का मान = ?

$= 1 + \frac{1}{2} + 11 + \frac{1}{2} + 111 + \frac{1}{2} + 1111 + \frac{1}{2}$

$= 1234 + 2$

$= 1236$

Q $999\frac{1}{7} + 999\frac{2}{7} + 999\frac{3}{7} + 999\frac{4}{7}$
 $+ 999\frac{5}{7} + 999\frac{6}{7}$ का मान = ?

$999 + \frac{1}{7} + 999 + \frac{2}{7} + 999 + \frac{3}{7} + 999$

$+ \frac{4}{7} + 999 + \frac{5}{7} + 999 + \frac{6}{7}$

$= (999 \times 6) + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7}$

$= 5994 + \frac{21}{7}$

$= 5994 + 3$

$= 5997$ Ans

भिन्नात्मक योग के प्रश्न :- [B] -

Pattern =

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{4 \times 5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110}$$

+ $\frac{1}{132}$ का मान ज्ञात कीजिए?

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \\ &+ \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} \\ &- \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{3-1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72}$$

का मान ज्ञात = ?

$$\begin{aligned} &\frac{1}{9} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \\ &+ \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Number of 'Zero' (शून्यों की संख्या)

Concept

(i) शून्यों का निर्माण (2×5) के युग्म से होता है।

(ii) संख्याओं के गुणनक्रम में इस पहले संख्याओं का गुणनखण्ड करेंगे। गुणनखण्ड में (2×5) के बितने जोड़े बनेंगे दाहिनी ओर उतने ही शून्य होंगे।

(iii) संख्याओं के गुणनखण्ड में 2 और 5 की घाते देखेंगे और जिसकी घात कम होगी (2×5) के उतने ही जोड़े बनेंगे अर्थात् दाहिनी ओर उतने ही शून्य होंगे।

(iv) क्रमागत संख्याओं के गुणनफल में 5 की संख्या 2 से कम होती है अतः बितने 5 होंगे (2×5) के उतने ही जोड़े बनेंगे।

(v) क्रमागत विषम संख्याओं के गुणनखण्ड में 5 तो आता है लेकिन 2 नहीं होगा अर्थात् (2×5) के एक भी जोड़े नहीं बनेंगे। अर्थात् दाहिनी ओर कोई शून्य नहीं होगा।

Q- $125 \times 64 \times 35 \times 42 \times 15$ को हल करने में दाहिनी ओर कितने शून्य होंगे?

$$5^3 \times 2^6 \times 5 \times 7 \times 2 \times 3 \times 7 \times 3 \times 5$$

$$= 2^7 \times 5^5$$

$\therefore (2 \times 5)$ के 5 जोड़े बनेंगे अर्थात् दाहिनी ओर 5 शून्य होंगे।

Q 1 से 100 तक की सभी संख्याओं का गुणा करने पर दाहिनी ओर कितने शून्य होंगे?

ऐसी संख्याओं की सं० जिसमें

$$1 \text{ बार } 5 \text{ हो} = \frac{100}{5} = 20 \text{ बार}$$

ऐसी संख्याओं की सं० जिसमें

$$2 \text{ बार } 5 \text{ हो} = \frac{100}{5 \times 5} = 4 \text{ बार}$$

$$\therefore \text{Total '5'} = 20 + 4$$

$$= 24 \text{ बार}$$

$\therefore$ दाहिनी ओर 24 शून्य होंगे।

दूसरी विधि =

$$5 \mid 100 \text{ - भाज्य}$$

$$5 \mid 20 \text{ - भागफल को जोड़ लेते हैं।}$$

$$5 \mid 4$$

$$\therefore 20 + 4 = 24 \text{ (शून्य) दाहिनी ओर}$$

Q 1 से 1000 तक की सभी संख्याओं का गुणा करने पर दाहिनी ओर कितने शून्य होंगे?

$$5 \mid 1000 \text{ - भाज्य}$$

$$5 \mid 200$$

$$5 \mid 40$$

$$5 \mid 8$$

$$5 \mid 1$$

$$\text{- भागफल को जोड़ें}$$

$$\therefore (200 + 40 + 8 + 1)$$

$$= 249 \text{ (शून्य)}$$

$$\text{दाहिनी ओर होंगे}$$

Q $51 \times 52 \times 53 \times 54 \times \dots \times 99$ को हल करने पर दाहिनी ओर कितने शून्य होंगे?

$$(1 \times 2 \times 3 \dots \times 99) - (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 50)$$

$$5 \mid 200 \text{ - भाज्य}$$

$$5 \mid 40$$

$$5 \mid 8$$

$$5 \mid 1$$

$$5 \mid 50 \text{ - भाज्य}$$

$$5 \mid 10$$

$$5 \mid 2$$

$$= 10 + 2$$

$$= 12$$

$$40 + 8 + 1$$

$$= 49$$

अंतर

$$49 - 12$$

$$= 37 \text{ बार (शून्य)}$$

Q $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots \times 100$ को हल करने पर दाहिनी ओर कितने शून्य होंगे?

$$= 2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 4 \times \dots \times 2 \times 50$$

$$= 2^{50} [1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 50]$$

$$= 2^{50} \left[\begin{array}{l} 5 \mid 50 - \text{भाज्य} \\ 5 \mid 10 \\ 2 \mid 2 \end{array} \right] - \text{भागफल}$$

$$= 2^{50} [12 \text{ (बार) पाँच}]$$

$\therefore$ सिर्फ 12 बार शून्य होंगे।

Q $3 \times 6 \times 9 \times 12 \times \dots \times 300$ को हल करने पर दाहिनी ओर कितने शून्य होंगे?

$$= 3 \times 1 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times \dots \times 3 \times 100$$

$$= 3^{100} \times [1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 100]$$

(हल करेंगे)

$$= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 100$$

$$= \begin{array}{l} 5 \mid 100 - \text{भाज्य} \\ 5 \mid 20 \\ 1 \mid 4 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 5 \mid 100 \\ 5 \mid 20 \\ 1 \mid 4 \end{array}} \right\} - \text{भागफल}$$

$\therefore$ '5' (24) बार आया है

$\therefore$ 24 बार दाहिनी ओर शून्य होंगे।

14

Q $5 \times 10 \times 15 \times 20 \times \dots \times 250$ को हल करने पर दाहिनी ओर कितने शून्य होंगे?

$$5 \times 1 \times 5 \times 2 \times 5 \times 3 \times \dots \times 5 \times 50$$

$$= 5^{50} \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 50$$

$$= 5^{50} \times \left[\begin{array}{l} 1 \mid 50 - \text{भाज्य} \\ 2 \mid 25 \\ 2 \mid 12 \\ 2 \mid 6 \\ 2 \mid 3 \end{array} \right] - \text{भागफल}$$

$$= 5^{50} \times [25 + 12 + 6 + 3 + 1] \text{ बार '5'}$$

$$= 5^{50} \times [47] \text{ बार '2' तथा 12 बार '5'}$$

$$= 5^{62} \times 2^{47}$$

$\therefore$ (2x5) के 47 जोड़े बनेंगे

अतः दाहिनी ओर 47 'शून्य' होंगे।

Q $10 \times 20 \times 30 \times \dots \times 500$ में कितने शून्य होंगे?

$$10 \times 1 \times 10 \times 2 \times 10 \times 3 \times \dots \times 10 \times 50$$

$$= 10^{50} \times [1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 50]$$

$$= 10^{50} \left[\begin{array}{l} 5 \mid 50 - \text{भाज्य} \\ 5 \mid 10 \\ 2 \mid 2 \end{array} \right] - \text{भागफल}$$

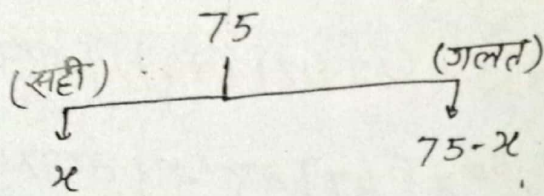
$$= 10^{50} [12 \text{ बार '5' होंगे}]$$

$$= 10^{50} \times 5^{12}$$

अतः सभी शून्य $[50 + 12] = 62$

सही गलत प्रश्नों की संख्या ज्ञात करना =

Q किसी परीक्षा में प्रत्येक सही उत्तर के लिए + 4 अंक और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए - 1 अंक निर्धारित किए गए। इस परीक्षा में एक छात्र ने 75 प्रश्नों को हल किया और उसे 125 अंक मिले तो बताइए छात्र ने कितने प्रश्न गलत हल किया?



$$4x + (75-x) \times -1 = 125$$

$$4x - 75 + x = 125$$

$$5x = 200$$

$$x = 40$$

$$\therefore \text{सही उत्तर} = 40$$

$$\therefore \text{गलत उत्तर} = (75 - 40) = 35$$

दूसरी विधि =

$$\text{सही उत्तर} = 75 \times 4 = 300 \text{ अंक मिलते}$$

परन्तु 125 अंक मिले।

अर्थात् उसने 175 अंकों का नुकसान हुआ

$\therefore$ एक गलत पर 5 अंक नुकसान होता है।

$$\therefore \text{गलत} = \frac{175}{5} = 35 \text{ (प्रश्न)}$$

Q किसी परीक्षा में प्रत्येक सही उत्तर के लिए + 1 अंक और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए - 0.25 अंक निर्धारित किए गए। इस परीक्षा में एक छात्र ने 80 प्रश्नों को हल किया और उसे 60 अंक मिले तो बताइए छात्र ने कितने प्रश्न गलत हल किया?

$$80 \times 1 = 80 \text{ अंक मिलते}$$

$$\text{परन्तु} = 60 \text{ अंक मिले}$$

अर्थात् उसने 20 अंक का नुकसान किया

$\therefore$ गलत पर 1.25 अंक का नुकसान होता है

$$\therefore \text{गलत} = \frac{20 \times 4}{1.25}$$

$$= \frac{80}{1.25}$$

$$= 64$$

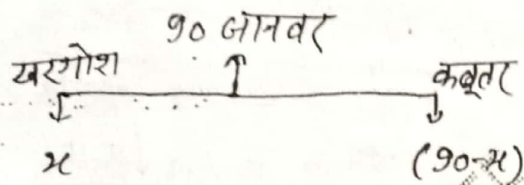
$$= 16 \text{ (प्रश्न)}$$

आनकरो पर प्रश्न (Case-1)

दो पैर व चार पैर वाले आनकरो

पर प्रश्न =

- Q किसी समूह में कुछ खरगोश व कुछ कबूतर हैं। यदि समूह में पैरों की संख्या 280 तथा गर्दन की संख्या 90 हो तो समूह में कितने खरगोश हैं।



$$4x + (90-x) \times 2 = 280$$

$$4x + 180 - 2x = 280$$

$$2x = 100$$

$$x = 50$$

$$\text{खरगोश की सं०} = 50$$

$$\text{तथा कबूतर की सं०} = (90-50) = 40$$

दूसरी विधि =

90 आनवर

↓ × 2 पैर

180 पैर अभीनपर

शेष 100 पैर अभीन से ऊपर

$$\therefore \text{खरगोश} = \frac{100}{2} = 50 (\text{संख्या})$$

सब =

$$\text{चार पैर} = \frac{\text{पैर} - 2 \times \text{गर्दन}}{2}$$

$$\text{चार पैर} = \frac{280 - 2 \times 90}{2}$$

$$= \frac{280 - 180}{2}$$

$$= \frac{100}{2}$$

$$\text{चार पैर} = 50 (\text{खरगोश})$$

सब

$$\text{दो पैर} = \frac{\text{गर्दन} \times 4 - \text{पैर}}{2}$$

$$= \frac{90 \times 4 - 280}{2}$$

$$= \frac{360 - 280}{2}$$

$$\text{दो पैर} = \frac{80}{2} = 40 (\text{कबूतर})$$

- Q किसी समूह में कुछ खरगोश व कुछ कबूतर हैं। यदि समूह में पैरों की संख्या 90 तथा गर्दन की संख्या 35 हो तो समूह में कितने खरगोश हैं।

35

↓ × 2

70 पैर अभीन पर

शेष 20 पैर अभीन से ऊपर

$$15 \therefore \text{खरगोश} = \frac{20}{2} = 10 (\text{संख्या})$$

Q किसी समूह में जितने सं० में आदमी उतने ही संख्या में घोड़े थे। आधे आदमी अपने-2 घोड़े पर बैठे थे, जबकि शेष आधे पैदल चल रहे थे। यदि जमीन पर चलने वाले पैरों की संख्या 90 हो तो समूह में कितने घोड़े हैं?

माना, जमीन पर चलने वाले,

$$\text{आदमी} = x$$

$\therefore x$ आदमी घोड़े पर बैठे हैं।

$$\therefore \text{Total आदमी} = 2x$$

$$\therefore \text{जमीन पर चलने वाले घोड़े} = 2x$$

$$\text{जमीन पर, आदमी के पैर + घोड़े के पैर} = 90$$

$$2x + 4x = 90$$

$$10x = 90$$

$$x = 9$$

$$\therefore \text{जमीन पर चलने वाले आदमी} = 9$$

$$\text{घोड़े पर बैठे आदमी} = 9$$

तथा सभी घोड़े की संख्या

$$= 2 \times 9$$

$$= 18$$

जानवरो पर प्रश्न Case-II

बन्दर से सम्बन्धित प्रश्न =

Q एक बन्दर 50 मी० ऊँचे खम्भे के नीचे है। वह पहले मि० में 5 मी० ऊपर चढ़ता है, किन्तु अगले मिनट में वह 2 मी० फिसल जाता है, तो कितने देर बाद वह खम्भे के शिखर पर होगा।

$$\text{पहले 1 मि० में} \longrightarrow +5 \text{ मी०}$$

$$\text{दूसरे 1 मि० में} \longrightarrow -2 \text{ मी०}$$

$$\text{2 मिनट में} \longrightarrow 3 \text{ मी०}$$

$$\downarrow \times 15$$

$$30 \text{ मि० में} \longrightarrow 45 \text{ मी०}$$

$$\therefore (30 + 1) \text{ मि० में} \longrightarrow (45 + 5) \text{ मी०}$$

$$31 \text{ मिनट में} \longrightarrow 50 \text{ मी०}$$

बन्दर 31 मिनट में वह खम्भे के शिखर पर होगा।

Q एक बन्दर 45 मी० खम्भे के नीचे है। वह पहले मिनट में 15 मी० ऊपर चढ़ता है, किन्तु अगले मिनट में वह 12 मी० फिसल जाता है तो कितने देर बाद वह खम्भे के शिखर पर होगा।

पहले 1 min में $\rightarrow +15$ मी०

दूसरे 1 min में $\rightarrow -12$ मी०

2 min में $\rightarrow 3$ मी०

$\times 10$ $\times 10$

20 min में $\rightarrow 30$ मी०

+ 1 min में $\rightarrow +15$ मी०

21 min में $\rightarrow 45$ मी०

Q एक बंदर 90 मी० ऊँचे एक खम्भे के नीचे है। वह पहले 1 min में 10 मी० ऊपर चढ़ता है, किंतु अगले 1 min में 4 मी० फिसल जाता है। तो कितने देर बाद वह खम्भे के शिखर पर होगा?

पहले 1 min में $\rightarrow +10$ मी०

दूसरे 1 min में $\rightarrow -4$ मी०

2 min में $\rightarrow 6$ मी०

$\times 14$ $\times 14$

28 min में $\rightarrow 84$ मी०

+ 36 sec में $\rightarrow +6$ मी०

28 min 36 sec में $\rightarrow 90$ मी०

10 मी० = 1 min

1 मी० = $\frac{1}{10}$ min

1 मी० = $\frac{1}{10} \times 60$ sec

1 मी० = 6 sec

हस्तमिलाप (Handshake) पर प्रश्न =

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$${}^nC_2 = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$= \frac{n(n-1) \times (n-2)!}{2! (n-2)!}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2 \times 1}$$

$$\text{कुल से०} = \frac{n(n-1)}{2}$$

जहाँ n = उपस्थित व्यक्ति/टीम

Q किसी क्रिकेट प्रतियोगिता में कुल 7 टीम ने हिस्सा लिया। उपस्थित प्रत्येक टीम एक-दूसरे से केवल एक मैच खेलती है, तो इस प्रकार कुल कितने मैच खेले जायेंगे?

$$\text{कुल मैच} = \frac{7(7-1)}{2}$$

$$= \frac{7 \times 6}{2}$$

$$\text{कुल मैच} = 21$$

इसरी विधि =

$$\begin{aligned}
 7^{\text{th}} &\rightarrow 6, 5, 4, 3, 2, 1 = 6 \text{ मैच} \\
 6^{\text{th}} &\rightarrow 5, 4, 3, 2, 1 = 5 \\
 5^{\text{th}} &\rightarrow 4, 3, 2, 1 = 4 \\
 4^{\text{th}} &\rightarrow 3, 2, 1 = 3 \\
 3^{\text{th}} &\rightarrow 2, 1 = 2 \\
 2^{\text{th}} &\rightarrow 1 = 1 \\
 1^{\text{th}} &\rightarrow 0 = 0
 \end{aligned}$$

21 मैच

Q किसी पार्टी में कुछ व्यक्ति उपस्थित थे, उपस्थित प्रत्येक व्यक्ति एक-दूसरे से एक बार हाथ मिलाता है। यदि कुल 120 बार हाथ मिलाने गये हो तो पार्टी में कितने व्यक्ति थे?

(a) 11 (b) 12 (c) 15 (d) 16

Soln = $120 = \frac{n(n-1)}{2}$

'd' option से =

$$120 = \frac{16(16-1)}{2}$$

$$120 = \frac{16 \times 15}{2}$$

$$120 = 120$$

$$L.H.S = R.H.S$$

अंको से संख्या बनाना =

द्वि-अंकीय संख्या के लिए =

$$\text{संख्या} = \text{दहाई का अंक} \times 10 + \text{इकाई का अंक}$$

Q किसी द्वि-अंकीय संख्या के अंकों का योग '9' है, जब इकाई के अंक के 14 गुने में से दहाई के अंक के चार गुने को घटाया जाता है तो जो संख्या प्राप्त होती है, मूल संख्या के परिवर्तित अंक होते हैं तो वह संख्या बताइए?

(a) 72

(b) 63

(c) 81

(d) 45

Option से 'd' से -

$$\begin{array}{r}
 45 \\
 \begin{array}{l}
 \text{---} \times 14 = 70 \\
 \text{---} \times 4 = -16 \\
 \hline
 54
 \end{array}
 \end{array}$$

मूल सं० '45' के परिवर्तित रूप '54' है।

II method =

माना इकाई का अंक = x

व दहाई का अंक = y

$$\therefore \text{मूल सं०} = 10y + x$$

$$x + y = 9 \quad \text{--- (i)}$$

$$14x - 4y = 10x + y$$

$$14x - 10x = y + 4y$$

$$4x = 5y$$

$$x = \frac{5y}{4} \quad \text{यह मान समी (i) में रखने पर}$$

$$\frac{5y}{4} + y = 9$$

$$5y + 4y = 36$$

$$9y = 36$$

$$y = 4$$

$$\therefore x \Rightarrow x + y = 9$$

$$x = 5$$

$$\text{मूल अंक} = 10 \times y + x$$

$$= 10 \times 4 + 5$$

$$= 40 + 5 = 45 \quad \text{Ans}$$

Q किसी द्वि-अंकीय संख्या के अंको का योग '9' है। जब मूल संख्या में से 27 घटा दिया जाता है तो प्राप्त संख्या मूल संख्या के परिवर्तित अंक होते हैं तो वह संख्या बताइये?

(a) 72

(b) 63

(c) 45

(d) 36

Option 'c' से =

$$\text{मूल सं०} = 63$$

$$\begin{array}{r} -27 \\ \hline 36 \end{array}$$

मूल सं० का परिवर्तित रूप '36'

है। अतः 63 Answer होगा।

Q किसी त्रि-अंकीय संख्या के अंको का योग 10 है। जिसमें सैकड़ों का अंक इकाई व दहाई के अंक के योग के बराबर है। जब मूल संख्या के अंको के क्रम को बदल दिया जाता है तो प्राप्त संख्या मूल संख्या से 297 कम हो जाती है तो वह संख्या बताइये?

(a) 514 (b) 541 (c) 523 (d) 532

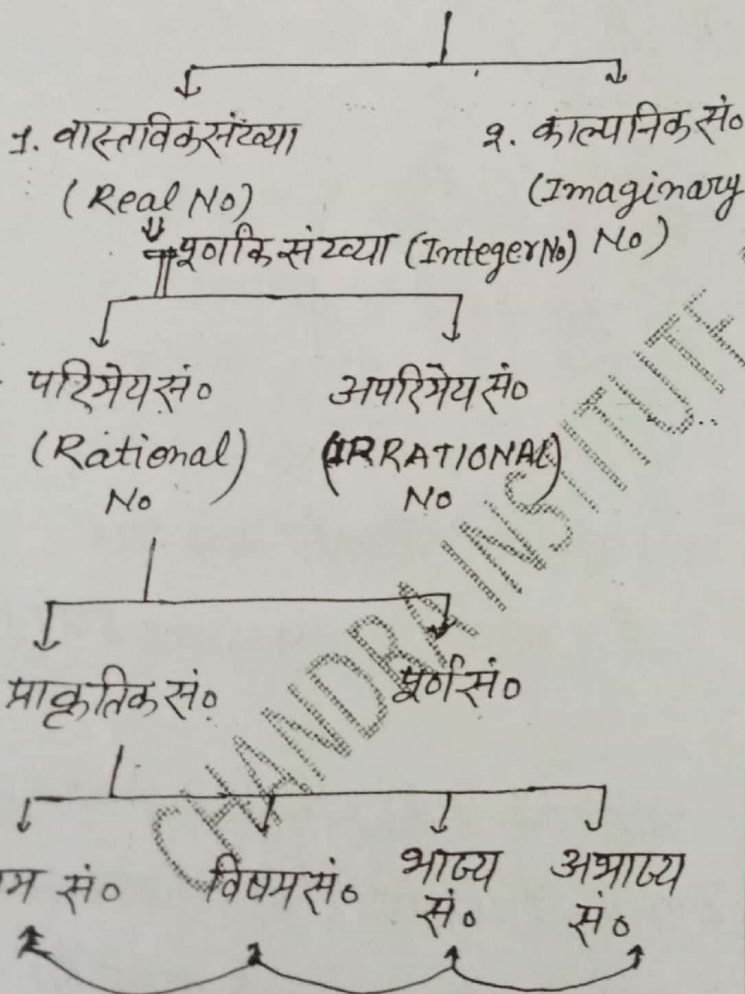
Option 'd' से-

मूलसं० $\Rightarrow 532$

$-235 \Rightarrow$ मूलसं० का उल्टा सं०

297 (शर्त की सं०)

संख्याओं का सामान्य परिचय



1. वास्तविक सं० =

$\rightarrow$ किसी प्रश्न को हल करने पर जो मान प्राप्त होता है (काल्पनिक संख्या को छोड़कर) वास्तविक संख्या कहलाता है।

या $\rightarrow$ समस्त परिमेय सं० और अपरिमेय संख्या का समुच्चय वास्तविक संख्या कहलाता है।

2. काल्पनिक सं० =

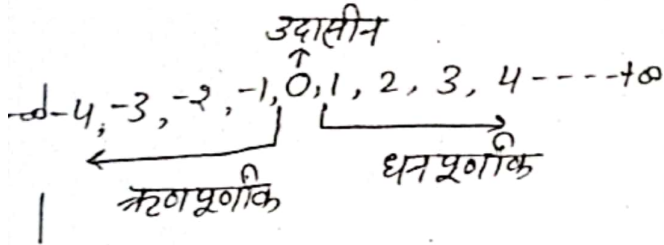
* संख्याएँ जो कल्पना मात्र में हो परन्तु वास्तव में न हो अर्थात् वे संख्याएँ जिसे ठीक ढंग से परिभाषित नहीं किया जा सके काल्पनिक सं० कहलाता है। इसे 'i' (आइयोट) द्वारा प्रदर्शित करते हैं। विरोधता ऐसी सं० करणीगत ऋणात्मक होती है।

जहाँ $i = \sqrt{-1}$

पूर्णांक संख्या =

समस्त ऋण प्राकृतिक

संख्या, शून्य सहित समस्त
धन प्राकृतिक संख्या के समूह
को पूर्णांक संख्या कहते हैं -



Q सबसे छोटी पूर्णांक सं० क्या होगी।

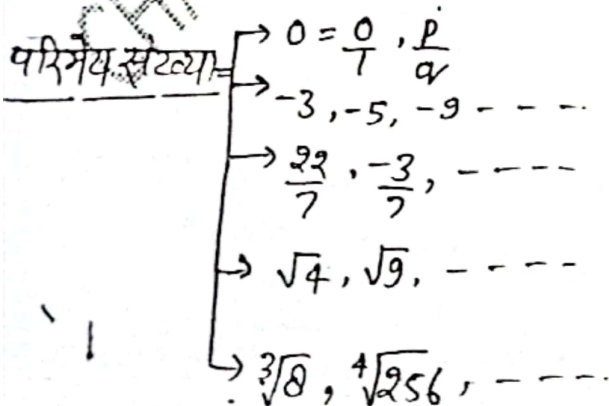
उत्तर - ज्ञात नहीं किया जा सकता / ∞

परिमेय संख्या (Rational Number)

संख्याएँ जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में

परिभाषित किया जा सके परिमेय
संख्या कहलाती हैं जहाँ p व q

दोनों पूर्णांक हो परन्तु $q \neq 0$



Note = यदि दशमलव के बाद संख्याओं
का यथार्थ निर्धारण सम्भव हो
अर्थात् शान्त दशमलव भिन्न परिमेय
होती है।

शान्त दशमलव
(परिमेय)

- $0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = \frac{p}{q}$
- $1.732 = \frac{1732}{1000} = \frac{p}{q}$
- $3.14 = \frac{314}{100} = \frac{p}{q}$

Note = समस्त आवर्त दशमलव संख्याएँ
परिमेय होती हैं।

1. सरल/शुद्ध आवर्त दशमलव Ex = $0.555\dots$ $= 0.\overline{5} = \frac{5}{9} = \frac{p}{q}$ Ex = $0.373737\dots$ $= 0.\overline{37} = \frac{37}{99} = \frac{p}{q}$	2. मिश्रित आवर्त दशमलव Ex = $0.574747\dots$ $= 0.57\overline{47}$ $= \frac{5747 - 57}{9900} = \frac{5690}{9900} = \frac{p}{q}$
---	---

Ex = $5.371371371\dots$
 $= 5.\overline{371} = 5 + 0.\overline{371}$
 $= 5 + \frac{371}{999}$
 $= 5 \frac{371}{999}$

Note = दो परिमेय संख्याओं के मध्य
अनंत परिमेय संख्या होती हैं।

अपरिमेय संख्या (Irrational No)-

→ संख्याएँ जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में परिभाषित न किया जा सके अपरिमेय संख्या कहलाती हैं।

अपरिमेय संख्या $\rightarrow \sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \dots$
 $\rightarrow \pi$

प्राकृतिक संख्या = शून्य को छोड़कर सभी संख्या प्राकृतिक संख्या होती हैं। प्राकृतिक संख्या कभी भी ऋणात्मक नहीं होती हैं।

Ex - 1, 2, 3, 4, 5, $\dots \infty$

पूर्ण संख्या = शून्य को लेकर सभी संख्या पूर्ण संख्या कहलाती हैं।

Ex - 0, 1, 2, 3, 4, $\dots \infty$

सम संख्या =

Ex - 2, 4, 6, 8, $\dots \infty$

विषम संख्या =

Ex - 3, 5, 7, 9, $\dots \infty$

भाज्य संख्या =

वे प्राकृतिक संख्या जिनके कम से कम 3 गुणनखण्ड हो भाज्य संख्या कहलाती हैं।

सबसे छोटी भाज्य संख्या 4 है।

Ex = 4 $\rightarrow$ 1, 2, 4
6 $\rightarrow$ 1, 2, 3, 6

अभाज्य संख्या =

वे प्राकृतिक संख्या जिनके सिर्फ 2 गुणनखण्ड हो उसे अभाज्य संख्या कहलाती हैं।

Ex - 2 $\rightarrow$ 1, 2

3 $\rightarrow$ 1, 3

5 $\rightarrow$ 1, 5

7 $\rightarrow$ 1, 7

* सबसे छोटी अभाज्य संख्या '2' है। जो सिर्फ एक सम अभाज्य संख्या है।

* 1 से लेकर 50 तक 15 अभाज्य संख्या हैं।

* 1 से लेकर 100 तक 25 अभाज्य संख्या हैं।

Chapter-2

गणितीय संक्रिया / सरलीकरण

1. करणी (Surd)
2. घातांक (Indices)
3. भिन्न (Fraction)
4. वर्गमूल एवं घनमूल (Square root & Cube root)

करणी (Surd)

1. जब करणी अनन्त बार हो $\begin{bmatrix} + \\ - \\ \times \end{bmatrix}$

Q यदि $\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\dots}}}$ का मान क्या होगा?

माना $\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\dots}}} = x \quad \dots (1)$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर-

$$42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + \dots}} = x^2$$

$$42 + x = x^2$$

$$x^2 - x - 42 = 0$$

$$x^2 - 7x + 6x - 42 = 0$$

$$x(x-7) + 6(x-7) = 0$$

$$(x-7)(x+6) = 0$$

$$x-7=0, \quad x+6=0$$

$$x=7$$

$$x=-6$$

Trick-

$42 \left\langle \begin{matrix} 6 \\ x \\ 7 \end{matrix} \right\rangle \text{अन्तर 'x'}$
 Ans = +7 या -6

धनात्मक अंक का

प्रश्न है, $\therefore$ बड़े को +ive लिया है, और 6 को (-ive) लिया गया है।

Q यदि $\sqrt{110-\sqrt{110-\sqrt{110-\dots}}}$ का मान क्या होगा?

Trick -

$110 \left\langle \begin{matrix} 10 \\ x \\ 11 \end{matrix} \right\rangle \text{अन्तर 'x'}$
 Ans = +10 या -11

ऋणात्मक अंक का प्रश्न है,

$\therefore$ बड़े को -ive लिया है, और छोटे का धनात्मक (+ive) लिया गया है।

Q $\sqrt{13\sqrt{13\sqrt{13\cdots}}} = ?$

Trick = 13 Ans.

Rule-

जब गुणा के रूप में करणी अमल बार हो तो ऐसे प्रश्नो का उत्तर वही सं. होगा जो करणी के अन्दर की राशि होती है।

माना $\sqrt{13\sqrt{13\sqrt{13\cdots}}} = x$ (i)

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर -

$\Rightarrow 13\sqrt{13\sqrt{13\cdots}} = x^2$

$\Rightarrow 13 \times x = x^2$

$\Rightarrow 13x = x^2$

$x = 13$

Q यदि $\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\cdots}}} = (343)^{2x-1}$ हो तो $x = ?$

$7 = (343)^{2x-1}$

$7 = (7^3)^{2x-1} \quad [(a^m)^n = a^{mn}]$

$7^1 = 7^{6x-3} \quad [यदि a^m = a^n \text{ तब } m=n]$

$\Rightarrow 1 = 6x-3$

$\Rightarrow 6x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ Ans

Q यदि $\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5\cdots}}} = m$ तथा $\sqrt{5-\sqrt{5-\sqrt{5\cdots}}} = n$ हो तो निम्न में कौन सा कथन सत्य है?

(a) $m+n-1=0$

(b) $m-n+1=0$

(c) $m-n-1=0$

(d) $m+n+1=0$

Soln =

$\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5\cdots}}} = m$ (i)

$\sqrt{5-\sqrt{5-\sqrt{5\cdots}}} = n$ (ii)

eqn (i) से -

$5 + \sqrt{5+\sqrt{5\cdots}} = m^2$

$5 + m = m^2$

$5 + m = m^2$

$5 = m^2 - m$

इसी प्रकार समी (ii) को हल करने पर -

$$5 = m^2 + n \text{ --- (iv)}$$

समी (ii) = समी (iv) के -

$$m^2 - m = m^2 + n$$

$$m^2 - m^2 = (m+n)$$

$$(m+n)(m-n) = (m+n)$$

$$(m-n) = 1$$

$$\boxed{m - n - 1 = 0} \text{ Ans}$$

जब करणी अनन्त बार न हो - $\begin{bmatrix} + \\ - \\ \times \end{bmatrix}$

$$\sqrt{180 - \sqrt{130 - \sqrt{76 + \sqrt{19 + \sqrt{36}}}}} = ?$$

$$= \sqrt{180 - \sqrt{130 - \sqrt{76 + \sqrt{19 + 6}}}}$$

$$= \sqrt{180 - \sqrt{130 - \sqrt{76 + 5}}}$$

$$= \sqrt{180 - \sqrt{130 - 9}}$$

$$= \sqrt{180 - \sqrt{121}}$$

$$= \sqrt{180 - 11}$$

$$= \sqrt{169} = 13 \text{ Ans}$$

$$\sqrt[3]{521 - \sqrt{75 + \sqrt[3]{221 - \sqrt{25}}}}$$

$$\sqrt[3]{521 - \sqrt{75 + \sqrt[3]{221 - 5}}}$$

$$\sqrt[3]{521 - \sqrt{75 + \sqrt[3]{216}}}$$

$$\sqrt[3]{521 - \sqrt{75 + 6}}$$

$$\sqrt[3]{521 - \sqrt{81}}$$

$$\sqrt[3]{521 - 9}$$

$$\sqrt[3]{512}$$

$$8 \text{ Ans}$$

गुणा के लिए -

Rule = यदि $\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\dots n$ बार हो

$$\text{Result} = (x)^{\frac{n}{2n} - 1}$$

$$\sqrt[4]{5 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = ?$$

Trick

$$R = (5)^{\frac{2^4 - 1}{2 \times 5}}$$

$$= (5)^{\frac{15}{10}}$$

Ans

Discriptive

$$\sqrt[4]{5 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = x \text{ --- (i)}$$

वर्ग करने पर

$$\Rightarrow \sqrt[4]{5 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = x^2 \text{ [वर्ग करने पर]}$$

$$\Rightarrow [(5)^2 \cdot (5)^1 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}] = x^4$$

$$\Rightarrow [(5)^4 \cdot (5)^2 \cdot (5)^1 \cdot \sqrt{5}] = x^8$$

$$\Rightarrow (5)^8 \cdot (5)^4 \cdot (5)^2 \cdot (5)^1 = x^{16}$$

$$\Rightarrow 5^{15} = x^{16}$$

$$\therefore x = 5^{15/16} \text{ Ans}$$

3. करणियों की तुलना पर प्रश्न =

Step-1 = सर्वप्रथम करणियों को हटाये

Step-2 = अब, भिन्नात्मक घात को सरल

घात में बदलने के लिए हर का

ल०स० ज्ञात करते हैं। प्राप्त ल०स० का

सभी घातों में गुणा करके सरल घात में बदल लेते हैं।

$$2\sqrt{x} = x^{1/2}, \quad 3\sqrt{x} = x^{1/3}$$

$$4\sqrt{x} = x^{1/4}$$

Q $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{9}$ व $\sqrt[6]{20}$ में बड़ी सं० = ?

$$2^{\frac{1}{2} \times 12}, 5^{\frac{1}{3} \times 12}, 9^{\frac{1}{4} \times 12} \text{ व } 20^{\frac{1}{6} \times 12}$$

घातो के हर (2, 3, 4 व 6) का ल०स० = 12

$$= 2^6, 5^4, 9^3, 20^2$$

$$= 64, 625, 729, 400$$

$$\text{बड़ी सं०} = 729$$

∴ $\sqrt[4]{9}$ बड़ी सं० होगी।

Q $\sqrt{3}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[4]{12}$ व $\sqrt[6]{25}$ को अवरोही = ?

$$3^{\frac{1}{2} \times 12}, 7^{\frac{1}{3} \times 12}, 12^{\frac{1}{4} \times 12}, 25^{\frac{1}{6} \times 12}$$

घात के हर (2, 3, 4 व 6) का ल०स० = 12

$$= 3^6, 7^4, 12^3, 25^2$$

$$= 729, 2401, 1728, 625$$

$$\text{अवरोही क्रम} = 3\sqrt[3]{7} > 4\sqrt[4]{12} > \sqrt{3} > \sqrt[6]{25}$$

Q $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$ और $(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$ में बड़ी सं० = ?

Soln- घातो का हर (2, 3) का ल०स० = 6

$$= (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2} \times 6} \text{ व } (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3} \times 6}$$

$$= (\frac{1}{2})^3 \text{ व } (\frac{1}{3})^2$$

$$= \frac{1}{8} \text{ व } \frac{1}{9}$$

बड़ी सं० = $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$ होगी।

* परिमेयकरण / संयुग्मी (Rationalisation)

पर प्रश्न :-

पहचान = यदि हर द्विपदी हो, जिसके दोनो पद या कम से कम एक पद वर्ग में हो और जो पद वर्ग में हो पूर्ण वर्ग सं० न हो तो ऐसे प्रश्नों को परिमेय करके हल करते हैं।

नियम-1, यदि हर के दोनो पदों के वर्गों का अन्तर 1 हो तो ऐसे प्रश्नों का

परिमेयकरण व्युत्क्रम (Reciprocal) और चिह्न का विपरीत होता है।

* $\frac{a}{b}$ का गुणात्मक प्रतिलोम / व्युत्क्रम = $\frac{b}{a}$

* $\frac{a}{b}$ का योग्य प्रतिलोम = $-\frac{a}{b}$

Q $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ का मान = ?

$$\sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{1}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{2} \text{ Ans.}$$

Trick $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ का मान = ?

$$\sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \text{ Ans.}$$

$$\begin{aligned} & \text{Q } \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} = ? \\ & = \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{4}-\sqrt{3} + \dots + \sqrt{100}-\sqrt{99} \\ & = -1 + \sqrt{100} \\ & = -1 + 10 = 9 \text{ Ans} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Q } \frac{1}{3-\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{4}} = ? \\ & = 3+\sqrt{8} - (\sqrt{8}+\sqrt{7}) + \sqrt{7}+\sqrt{6} - (\sqrt{6}+\sqrt{5}) + \sqrt{5}+\sqrt{4} \\ & = 3+\sqrt{8} - \sqrt{8} - \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{6} - \sqrt{6} - \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{4} \\ & = 3 + \sqrt{4} \\ & = 3+2 = 5 \text{ Ans} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Q } \frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \text{ का मान ज्ञात कीजिए} \\ & = \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{2} - \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2} - \frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{2} \\ & = \sqrt{7}-\sqrt{5} - \sqrt{5}+\sqrt{3} - 2\sqrt{7}-2\sqrt{3} \\ & = -\sqrt{7}-\sqrt{5} - 2\sqrt{3} \\ & = -2\sqrt{5} \text{ Ans} \end{aligned}$$

* $(a+b)^2$ या $(a-b)^2$ पर प्रश्न :-

पहचान - जब कोण या अन्तर के रूप में करणी एक से अधिक बार हो परन्तु अन्त बार न हो और आन्तिम करणी वर्ग, वर्ग संख्या न हो तो ऐसे प्रश्नों की structure $(a+b)^2$ या $(a-b)^2$ के रूप में होती है।

$$\sqrt{12-\sqrt{140}} \text{ का मान} = ?$$

2ab (Last करणी को 2ab बना देना है, जहाँ $a > b$)

$$\begin{aligned} & \sqrt{12-\sqrt{2 \times 2 \times 5 \times 7}} \\ & \sqrt{12-2\sqrt{7 \times 5}} = \sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2} \\ & \sqrt{12-2\sqrt{7 \times 5}} = \sqrt{7}-\sqrt{5} \text{ Ans.} \end{aligned}$$

$$\text{Q } \sqrt{5-2\sqrt{6}} \text{ का मान} = ?$$

$$\begin{aligned} & = \sqrt{5-2\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \\ & = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}-\sqrt{2} \text{ Ans} \end{aligned}$$

$$\text{Q } \text{यदि } x = 7+4\sqrt{3} \text{ तो } \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ का मान} = ?$$

$$= \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = ?$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{7+4\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{7+2 \cdot 2\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$$

$$a^2+b^2+2ab = 2+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{x} = 2+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2+\sqrt{3} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$= 2+\sqrt{3} + 2-\sqrt{3}$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 4 \text{ Ans.}$$

$$\text{Q } \sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}} \text{ का मान} = ?$$

$$= \sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{3+8(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2}}$$

$$= \sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{3+8(2+\sqrt{3})}}$$

$$= \sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{3+16+24\sqrt{3}}}$$

$$= \sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{(4+\sqrt{3})^2}}$$

$$= \sqrt{-\sqrt{3}+4+\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{4} = 2$$

[३] घातोंक (Indices)

सामान्य नियम -

- * गुणा का नियम $= a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- * भाग का नियम $= a^m \div a^n = a^{m-n}$
- * घातों पर घात नियम $= \{ (a^m)^n \}^p = a^{m \cdot n \cdot p}$
परन्तु $a^{m \cdot n \cdot p} \neq a^{m \cdot n \cdot p}$

* घात का शून्य होना $a^0 = 1$

* घातों का द्विपक्षीय नियम -

(A) यदि $a^m = a^n$ तब $m = n$

(B) यदि $a^m = b^m$ तब $a = b$

* घात का व्युत्क्रम नियम -

यदि $a^m = b$ तब $a = b^{1/m}$

* अन्य नियम -

$$1. (a \times b \times c)^n = a^n \times b^n \times c^n$$

$$2. a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$\text{या } \frac{1}{a^{-m}} = a^m$$

$$\text{Q } 5^{0.25} \times 125^{0.25} \text{ का मान } = ?$$

$$= 5^{0.25} \times (5^3)^{0.25}$$

$$= 5^{0.25} \times 5^{0.75} \times 3$$

$$= 5^{0.25} \times 5^{0.75}$$

$$= 5^{0.25+0.75}$$

$$= 5^1 = 5 \text{ Ans}$$

Q यदि $8^{x+1} = 64$ हो, तो 3^{2x+1} का मान क्या होगा?

$$\Rightarrow 8^{x+1} = 64$$

$$\Rightarrow 8^{x+1} = 2^6$$

$$\Rightarrow (2^3)^{x+1} = 2^6$$

$$\Rightarrow 2^{3x+3} = 2^6 \quad [\text{यदि } a^m = a^n \text{ तब } m = n]$$

$$\Rightarrow 3x+3 = 6$$

$$\Rightarrow 3x = 6-3$$

$$\Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{तो } 3^{2x+1} = 3^{2 \times 1 + 1}$$

$$= 3^{2+1} = 3^3 = 27$$

$$\boxed{3^{2x+1} = 27 \text{ Ans}}$$

Q यदि $5^{2x-1} - 3125 = 0$ हो तो 3^x का

$$\Rightarrow 5^{2x-1} - 3125 = 0$$

$$\Rightarrow 5^{2x-1} - 5^5 = 0$$

$$\Rightarrow 5^{2x-1} = 5^5$$

$$\Rightarrow 2x-1 = 5$$

$$\Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{तो } 3^x = ?$$

$$= 3^3 = 27 \text{ Ans.}$$

Q $m^n = 125$ हो तो m^m का मान क्या होगा? तथा 2^{m-n+1} का मान क्या होगा?

$$\Rightarrow m^n = 125$$

$$\Rightarrow m^n = 5^3 \quad (\text{तुलना करने पर})$$

$$\boxed{m=5 \text{ तथा } n=3}$$

$$(i) m^n = 3^5 = 243$$

$$(ii) 2^{m-n+1} = 2^{5-3+1} \\ = 2^3 = 8$$

Q यदि $m^n = 121$ हो, तो $(m-1)^{n+1}$ का मान क्या होगा?

$$\Rightarrow m^n = 121$$

$$\Rightarrow m^n = 11^2 \text{ (तुलना कले प)} \\ \Rightarrow \boxed{m=11, n=2}$$

$$\Rightarrow (m-1)^{n+1} = ?$$

$$= (11-1)^{2+1}$$

$$= (10)^3 = 1000 \text{ Ans}$$

Q $(243)^{n/5} \cdot 3^{2n+1}$ का मान क्या होगा

$$1. \frac{9^n \cdot 3^{n-1}}{9^n \cdot 3^{n-1}}$$

$$= \frac{(243)^{n/5} \cdot 3^{2n+1}}{9^n \cdot 3^{n-1}}$$

$$= \frac{(3^5)^{n/5} \cdot 3^{2n+1}}{(3^2)^n \cdot 3^{n-1}}$$

$$= \frac{3^{8 \times n/5} \cdot 3^{2n+1}}{3^{2n} \cdot 3^{n-1}}$$

$$= \frac{3^n \cdot 3^{2n+1}}{3^{2n} \cdot 3^{n-1}} = \frac{3^{n+2n+1}}{3^{2n+n-1}}$$

$$= \frac{3^{3n+1}}{3^{3n-1}}$$

$$= 3^{3n+1-3n+1} \\ = 3^2 = 9 \text{ Ans.}$$

$$Q (xy)^{a-b} \cdot (xy)^{b-c} \cdot (xy)^{c-a} = ? \\ = (xy)^{a-b+b-c+c-a} \\ = (xy)^0 = 1 \text{ Ans.}$$

Note: ऐसे प्रश्नों का उत्तर सदैव = 1 होता है।

$$Q \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} = ? \\ = (x^{a-b})^{a+b} \cdot (x^{b-c})^{b+c} \cdot (x^{c-a})^{c+a} \\ = x^{a^2-b^2} \cdot x^{b^2-c^2} \cdot x^{c^2-a^2} \\ = x^{a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2} \\ = x^0 = 1 \text{ Ans}$$

Q $x^{\frac{a-b}{ab}} \cdot x^{\frac{b-c}{bc}} \cdot x^{\frac{c-a}{ca}}$ का मान = ?

$$= x^{\frac{a-b}{ab} + \frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ca}} \\ = x^{\frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} + \frac{b}{bc} - \frac{c}{bc} + \frac{c}{ca} - \frac{a}{ca}} \\ = x^{\frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{c}} \\ = x^0 = 1$$

Pattern पर प्रश्न =

$$\boxed{a^{m+n} = a^m \cdot a^n}$$

Structure Single/Double Equation

Q यदि $2^{x+1} + 2^{x-1} = 320$ हो तो x का मान?

- (a) 5 (b) 6
(c) 7 (d) 8

option से —

$x = 7$ रखते हैं, तो

$$\begin{aligned} &= 2^{7+1} + 2^{7-1} \\ &= 2^8 + 2^6 = 256 + 64 \\ &= 320 \text{ Ans} \end{aligned}$$

option method से =

$$\Rightarrow 2^{x+1} + 2^{x-1} = 320$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot 2^1 + 2^x \cdot 2^{-1} = 320$$

$$\Rightarrow 2^x \left(2^1 + \frac{1}{2} \right) = 320$$

$$\Rightarrow 2^x \left(2 + \frac{1}{2} \right) = 320$$

$$\Rightarrow 2^x \left(\frac{5}{2} \right) = 320 \Rightarrow 2^x = \frac{320 \times 2}{5}$$

$$\Rightarrow 2^x = 128$$

$$\Rightarrow 2^x = 2^7$$

$$\Rightarrow x = 7 \text{ Ans}$$

Q यदि $2^{x+4} - 2^{x+2} = 3$ हो तो x का मान?

- (a) 2 (b) -2 (c) 3 (d) -3

option से -

$x = -2$ रखने पर -

$$= 2^{-2+4} - 2^{-2+2}$$

$$= 2^2 - 2^0$$

$$= 4 - 1 = 3 \text{ Ans}$$

Q यदि $2^a + 3^b = 17$ तथा

$$2^{a+2} - 3^{b+1} = 5 \text{ हो तो } a \text{ व } b$$

का मान क्या होगा?

Solⁿ $a = 3$ व $b = 2$ मान रखने पर

$$\Rightarrow 2^3 + 3^2 = 17$$

$$\Rightarrow 8 + 9 = 17$$

$$\Rightarrow 17 = 17$$

$$\Rightarrow 2^{a+2} - 3^{b+1} = 5$$

$$\Rightarrow 2^{3+2} - 3^{2+1} = 5$$

$$\Rightarrow 2^5 - 3^3 = 5$$

$$\Rightarrow 32 - 27 = 5$$

$$\Rightarrow 5 = 5$$

अतः $a = 3$ तथा $b = 2$ रखने पर

सभी 0 को संतुष्ट कर रहा है।

$\therefore a = 3, b = 2$ इसका x का उत्तर होगा।

घातांकीय सं० की तुलना करना =

Q $2^{250}, 3^{200}, 4^{150}$ व 5^{100} में बड़ी सं० बताइए?

Rule - 1. सर्वप्रथम घातो को समान करें

2. घातो का म० समान करके प्राप्त

म० सं० (n) को कुछ इस प्रकार रखें

Ex - $(a^m)^n$ के रूप में।

$$= 2^{250}, 3^{200}, 4^{150} \text{ व } 5^{100}$$

घातो (250, 200, 150, 100) का म० सं०

$$= 50$$

$$= (2^5)^{50}, (3^4)^{50}, (4^3)^{50}, (5^2)^{50}$$

$$= (32)^{50}, (81)^{50}, (64)^{50}, (25)^{50}$$

बड़ी सं० = $(81)^{50}$ है, $\therefore$

$$= 3200 \text{ बड़ी सं० होगी}$$

* जब तीन या तीन से अधिक व्यंजक आपस में बराबर हो =

Case-1- जब आधार समान हो =

Q यदि $2^x = 4^y = 8^z$ तथा $xyz = 288$ तो z का मान = ?

Solⁿ $2^x = (2^2)^y = (2^3)^z$

$$2^x = 2^{2y} = 2^{3z}$$

अतः $x = 2y = 3z$

$$\Rightarrow xyz = 288$$

$$\Rightarrow 32 \cdot \frac{32}{2} \cdot z = 288$$

$$\Rightarrow 9z^3 = 576$$

$$\Rightarrow z^3 = 576/9$$

$$\Rightarrow z^3 = 64 \Rightarrow z^3 = 4^3$$

$\boxed{z = 4}$ Ans

Q यदि $2^x = 4^y = 8^z$ तथा $\frac{1}{2x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{6z}$

$$= \frac{24}{7} \text{ तो } z = ?$$

$$2^x = 4^y = 8^z$$

$$2^x = (2^2)^y = (2^3)^z \Rightarrow 2^x = 2^{2y} = 2^{3z}$$

$\boxed{x = 2y = 3z}$

या $2x = 4y = 6z$

$$\therefore \frac{1}{2x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{6z} = \frac{24}{7}$$

$$= \frac{1}{62} + \frac{1}{62} + \frac{1}{62} = \frac{24}{7} \Rightarrow \frac{3}{62} = \frac{24}{7} \Rightarrow \frac{1}{22} = \frac{24}{7}$$

$$22 = \frac{7}{24} \Rightarrow z = \frac{7}{2 \times 24}$$

$$\therefore z = \frac{7}{48} \text{ Ans}$$

Case-2 जब आधार समान न हो -

Q यदि $2^x = 3^y = 6^{-z}$ तो $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = ?$

माना, $2^x = 3^y = 6^{-z} = k$

$2 = k^{1/x}, 3 = k^{1/y}, 6 = k^{1/z}$ यदि $a^m = b$ तब $a = b^{1/m}$

$2 \times 3 = 6 \Rightarrow k^{1/x} \cdot k^{1/y} = k^{1/z}$ $\left[\begin{array}{l} 2^x = k \text{ तब } 2 = k^{1/x} \\ 3^y = k \text{ तब } 3 = k^{1/y} \end{array} \right]$

$$\Rightarrow k^{1/x + 1/y} = k^{1/z}$$

अतः $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

$\boxed{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0}$

विविध प्रश्न =

Q यदि $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-6} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-1}$ हो तो $x = ?$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-1}$$

$$\Rightarrow -3 = 2x - 1$$

$$\Rightarrow 2x = -3 + 1 \Rightarrow 2x = -2$$

$x = -1$ Ans

Q यदि $\left(\frac{9}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$ हो, तो $x = ?$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^{-x} \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-x} \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{x-1} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{3}{2}\right]^{-2x} \cdot \left[\frac{2}{3}\right]^{3x-1} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{2}{3}\right]^{-2x+3x-3} = \left[\frac{2}{3}\right]^1$$

$$\Rightarrow -2x+3x-3 = 1$$

$$\Rightarrow x-3 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x=4} \text{ Ans}$$

Q यदि $a^x = b$, $b^y = c$ तथा $c^z = a$ तो $xyz = ?$

$$a^x = b$$

$$(c^z)^x = b \quad [\because a = c^z]$$

$$(b^y)^{xz} = b \quad [c = b^y]$$

$$b^{xyz} = b^1$$

$$\boxed{xyz = 1} \text{ Ans}$$

Fraction - (मिनि) =

साधारण प्रश्न =

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{25}\right) = ?$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{24}{25}$$

$$= \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow \left(2 - \frac{1}{3}\right) \left(2 - \frac{3}{5}\right) \left(2 - \frac{5}{7}\right) \dots \left(2 - \frac{997}{999}\right) = ?$$

$$= \frac{5}{3} \times \frac{7}{5} \times \frac{9}{7} \times \dots \times \left(\frac{1001}{999}\right)$$

$$= \frac{1001}{3} \text{ Ans}$$

जब तीन या तीन से अधिक व्यंजक आपस में काबज हो -

Note = ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिए हम constant का प्रयोग करते हैं।

Q यदि $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{c}{5}$ हों तो $\frac{a+b+c}{c}$ का मान

माना, $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{c}{5} = k$ $\left[\begin{array}{l} a = 3k \\ b = 7k \\ c = 5k \end{array}\right]$

$$a = 3k, b = 7k, c = 5k$$

$$\therefore \frac{a+b+c}{c} = \frac{3k+7k+5k}{5k}$$

$$= \frac{15k}{5k} = 3 \text{ Ans}$$

Q यदि $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = k$ हों तो $k = ?$

$$\frac{a+b}{c} = k, \frac{b+c}{a} = k, \frac{c+a}{b} = k$$

$$a+b = ck, b+c = ak, c+a = bk$$

$$a+b = ck \quad \text{--- (i)}$$

$$b+c = ak \quad \text{--- (ii)}$$

$$c+a = bk \quad \text{--- (iii)}$$

$$2a+2b+2c = ak+ck+bk$$

$$2(a+b+c) = k(a+b+c)$$

$$\boxed{k=2} \text{ Ans}$$

Note -

यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ तो अनुपात नियम से,

$$\frac{a+c+e}{b+d+f}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = k$$

अनुपात नियम से,

$$\frac{a+b+b+c+c+a}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \text{ Ans}$$

Hit & Trial Method -

$$a = b = c = 1$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{1+1}{1} = \frac{1+1}{1} = \frac{1+1}{1}$$

$$\Rightarrow 2 = 2 = 2 = k$$

$$k = 2 \text{ Ans.}$$

$$\text{यदि } \frac{a+2b+c}{b} = \frac{a+b+2c}{c} = \frac{2a+b+c}{a} = k \text{ तो } k = ?$$

$$a = b = c = 1 \text{ से -}$$

$$\frac{1+2+1}{1} = \frac{1+1+2}{1} = \frac{2+1+1}{1}$$

$$\Rightarrow 4 = 4 = 4 = k$$

$$k = 4 \text{ Ans.}$$

$$\text{यदि } \frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4} = (2a - pb + 3c) \text{ हो तो } p = ?$$

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4} = (2a - pb + 3c) = k$$

$$a = 3k, b = 5k, c = 4k$$

$$2a - pb + 3c = k$$

$$2 \times 3k - p \times 5k + 3 \times 4k = k$$

$$k(6 - 5p + 12) = k$$

$$-5p + 18 = 1$$

$$+5p = +18 + 1 \Rightarrow 5p = 19$$

$$p = \frac{19}{5}$$

अनुपातीमान पर प्रश्न =

$$\text{यदि } \frac{x}{y} = \frac{3}{1} \text{ हो तो } \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = ?$$

$$\left[\text{यदि } x:y = 3:1 \text{ हो तो } \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = ? \right]$$

$$x = 3$$

$$y = 1$$

$$\therefore \frac{9+1}{9-1} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\text{यदि } \frac{3a+2b}{2a-b} = \frac{4}{3} \text{ हो तो } \frac{a^2}{b^2} = ?$$

$$9a + 2b = 8a - 4b$$

$$9a - 8a = -4b - 2b$$

$$a = -10b$$

$$\frac{a}{b} = -10 \therefore \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$= (-10)^2$$

$$24$$

$$= 100 \text{ Ans.}$$

Q यदि $yz : zx : xy = 1 : 2 : 3$ हो तो

$$\frac{yz}{zx} \div \frac{y}{z} \text{ का मान } = ?$$

$$\text{या } \frac{yz}{xy} \times \frac{zx}{y} = \left(\frac{z}{y}\right)^2 = ?$$

Soln

$$yz : zx : xy = 1 : 2 : 3$$

$$\frac{yz}{zx} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{y} = 2$$

$$\therefore \left(\frac{x}{y}\right)^2 = (2)^2 = 4 \text{ Ans}$$

आवर्त दशमलव भिन्न :-

(Terminating Decimal Number)

1. सरल / शुद्ध आवर्त दशमलव
2. मिश्रित आवर्त दशमलव

1. सरल / शुद्ध आवर्त दशमलव :-

पहचान - यदि दशमलव के बाद किसी विशेष अंक की बार-बार पुनरावृत्ति हो तो, इसे सरल आवर्त दशमलव कहते हैं।

नियम - सरल आवर्त दशमलव को साधारण भिन्न में बदलने के लिए हर में उतना ही '9' लिखते हैं, जितने अंक पर बार (-) होता है और अंश में ठीक वही संख्या रखते हैं, जिस अंक पर (-) होता है।

मिश्रित आवर्त दशमलव -

पहचान - यदि दशमलव के तुरंत बाद किसी विशेष अंक की पुनरावृत्ति न होकर कुछ ही अंकों की पुनरावृत्ति हो तो, उसे मिश्रित आवर्त दशमलव कहते हैं।

नियम - अंश - सर्वप्रथम दशमलव संख्या को पूर्णांक भागते हुए उस अंक को धरा देते हैं, जिस अंक पर बार (-) नहीं होता।

हर - हर में उतना ही 9 लिखते हैं, जितने अंक पर बार होता है, और जितने अंक पर बार नहीं होता उतनी ही '0' अंक बाद लगाते हैं।

सरल / शुद्ध आवर्त दशमलव पर आधारित प्रश्न :-

Q $0.555555 \dots$ का मान

$$= 0.\overline{5} = \frac{5}{9}$$

Q $0.73737373 \dots$ का मान

$$= 0.\overline{73} = \frac{73}{99}$$

Q $3.571571571 \dots$ का मान?

$$3.\overline{571} = 3 + 0.\overline{571}$$

$$= 3 + \frac{571}{999} = 3\frac{571}{999}$$

मिश्रित आवर्त दशमलव पर आधारित प्रश्न -

Q 0.5747474... का मान = ?

$$= 0.5\overline{74} = \frac{574-5}{990} = \frac{569}{990}$$

Q 2.74561561561... का मान

$$= 2.74\overline{561}$$

$$= 2 + \frac{74561-74}{99900}$$

$$= 2 + \frac{74487}{99900}$$

$$= 2 + \frac{24829}{33300} \text{ Ans}$$

अंश व हर में परिवर्तन से प्रश्न -

Double/Single Statement question -

Q यदि भिन्न के अंश व हर में 1 जोड़ देंगे तो उस भिन्न का मान 2 हो जाता है, और इसके अंश व हर में से 1 घटा देंगे तो भिन्न का मान 4 हो जाता है, तो वह भिन्न बताइए?

- (A) $\frac{9}{4}$ (B) $\frac{7}{3}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) None

Option से - (C) से -

$$\frac{5+1}{2+1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{5-1}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$$

25

माना, भिन्न $\frac{x}{y}$ है,

$$\frac{x+1}{y+1} = \frac{2}{1} \text{ अतः } x+1 = 2y+2$$

$$x-2y = 1 \text{ --- (i)}$$

$$\frac{x-1}{y-1} = \frac{4}{1} \text{ अतः } x-1 = 4y-4$$

$$x-4y = -3 \text{ --- (ii)}$$

समी 0 (i) व (ii) से -

$$\begin{array}{r} x-2y = 1 \text{ --- (i)} \\ x-4y = -3 \text{ --- (ii)} \\ \hline 2y = 4 \quad y = 2 \\ x = 5 \end{array}$$

∴ भिन्न = $\frac{5}{2}$ Ans

Q किसी भिन्न के अंश व हर का योग 11 है, जब इसके अंश में 1 जोड़ते हैं, तथा हर में से 2 घटाते हैं, तो इस भिन्न का मान $\frac{2}{3}$ हो जाता है, तो वह भिन्न होगा?

- (A) $\frac{4}{7}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{5}{6}$

Option (B) से -

$$= \frac{3+1}{8-2} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Q किसी भिन्न के अंश में 20% की कमी तथा हर में 20% की वृद्धि करने से भिन्न का मान $\frac{8}{15}$ हो जाता है, तो वह भिन्न बताइए।

माना, भिन्न $\frac{x}{y}$ है।

$$\frac{x \times \frac{80}{100}}{y \times \frac{120}{100}} = \frac{8}{15} \Rightarrow \frac{8x}{12y} = \frac{8}{15} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \text{ Ans}$$

गलत-पाठ्यांक पर प्रश्न (mis-reading based question) —

एक दाल को किसी सं० का $\frac{3}{14}$ बात कले को कहा गया किन्तु उसने गलती से संख्या का $\frac{3}{4}$ बात कर दिया, जिस कारण उसका उत्तर सही उत्तर से 150 अधिक मिला तो वह सं० बताइये?

माना सं० x है।

$$\text{सही उत्तर} = \frac{3x}{14}$$

$$\text{गलत उत्तर} = \frac{3x}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{4} - \frac{3x}{14} = 150$$

$$\Rightarrow 42x - 12x = 150 \times 4 \times 14$$

$$\Rightarrow 30x = 150 \times 4 \times 14$$

$$x = 5 \times 4 \times 14$$

$$x = 20 \times 14 \Rightarrow x = 280$$

$$\text{वह सं०} = 280 \text{ होगा।}$$

एक दाल को किसी सं० में $\frac{7}{6}$ से गुणा करने को कहा गया, किन्तु उसने गलती से सं० में $\frac{7}{6}$ से भाग कर दिया जिस कारण उसका उत्तर सही उत्तर से 39 कम मिला तो, वह सं० कितना होगा?

(a) 126 (b) 216 (c) 314 (d) 315

option (a) से -

$$\text{सही} = \frac{21}{6} \times \frac{7}{6} = 147$$

$$\text{गलत} = \frac{126}{\frac{7}{6}} = 126 \times \frac{6}{7} = 108$$

$\therefore$ सही व गलत में अंतर 39 है। $\therefore$ 126 उत्तर होगा।

माना सं० x है।

$$\text{सही उत्तर} = \frac{7x}{6}$$

$$\text{गलत उत्तर} = \frac{x}{\frac{7}{6}} = \frac{6x}{7}$$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{7x}{6} - \frac{6x}{7} = 39$$

$$\frac{49x - 36x}{42} = 39$$

$$\frac{13x}{42} = 39$$

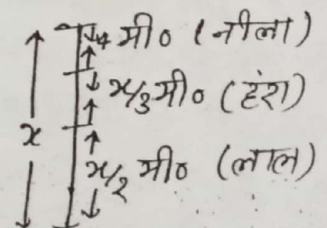
$$x = 3 \times 42 = 126$$

$$\text{वह सं०} = 126 \text{ होगा।}$$

इब्रती समस्या पर प्रश्न :-

(Word Problem based question)

यदि खम्भे का $\frac{1}{2}$ भाग लाल रंग से, $\frac{1}{3}$ भाग हरे रंग से और बचा हुआ $\frac{1}{6}$ भाग नीले रंग से रंगा गया है, तो श्रे खम्भे की ल० बताइये?



$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{4}{1} = x$$

$$\frac{3x + 2x}{6} + 4 = x$$

$$3x + 2x + 24 = 6x$$

$$6x + 24 = 6x$$

$$24 = x \Rightarrow x = 24 \text{ मी०}$$

$$\text{खम्भे की ल०} = 24 \text{ मी०}$$

Note - जब प्रत्येक अंश के बाद 'शेष का' निकट है, तो

$$\text{कुल सम्पत्ति} = \frac{\text{बचा हुआ भाग}}{(1-\frac{a}{b})(1-\frac{c}{d})(1-\frac{e}{f})}$$

एक व्यक्ति अपनी कुल सम्पत्ति का $\frac{1}{3}$ भाग अपने पत्नी को, शेष का $\frac{1}{4}$ भाग पुत्री को, शेष का $\frac{1}{5}$ भाग पुत्र को देता है, यदि अब उसके पास 36000 ₹ बचे हों तो व्यक्ति की प्रारम्भिक सम्पत्ति बताइये।

$$\text{कुल सम्पत्ति} = 36000$$

$$(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{5})$$

$$= 36000$$

$$(\frac{2}{3})(\frac{3}{4})(\frac{4}{5})$$

$$= \frac{18000}{24 \times 3 \times 4 \times 5}$$

$$= 90000 \text{ ₹}$$

* कॉमल एवं कमल *

साधारण प्रश्न =

❏ यदि $\sqrt{1024} = 32$ हो तो

$\sqrt{10.24} + \sqrt{0.1024} + \sqrt{0.001024}$ का मान क्या होगा?

$$= 3.2 + 0.32 + 0.032$$

$$= 3.200 + 0.320 + 0.032$$

$$= 3.552 \text{ Ans.}$$

❏ यदि $\sqrt[3]{1728} = 12$ हो तो-

$$\sqrt[3]{1.728} + \sqrt[3]{0.001728} + \sqrt[3]{0.000001728} \text{ का मान} = ?$$

$$= 1.2 + 0.12 + 0.012$$

$$= 1.200 + 0.120 + 0.012$$

$$= 1.332$$

❏ यदि $\sqrt{\frac{1+25}{144}} = 1 + \frac{x}{12}$ हो तो $x = ?$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{169}{144}} = \frac{13+x}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{13}{12} = \frac{13+x}{12} \Rightarrow x = 0$$

❏ किसी सं० के वर्ग में से $(20)^3$ घटाने पर 4321 प्राप्त होता है, तो वह सं० बताइये?

माना वह सं० x है।

$$x^2 - (20)^3 = 4321$$

$$x^2 - 8000 = 4321$$

$$x^2 = 12321$$

$$x = 111$$

$$11^2 = 121$$

$$(111)^2 = 12321$$

$$(1111)^2 = 1234321$$

गुणा एवं भाग पर प्रश्न-

→ ऐसे प्रश्नों को 'गुणनखण्ड विधि' से हल करते हैं।

* गुणा के लिए - प्राप्त अभाज्य गुणनखण्ड में समूह बनाने के बाद जिस गुणनखण्ड की 'कमी हो' से गुणा करते हैं।

* भाग के लिए - प्राप्त अभाज्य गुणनखण्ड में समूह बनाने के बाद जो गुणनखण्ड 'अतिरिक्त हो' से भाग करते हैं।

Q 648 में कौन सी छोटी संख्या से गुणा कर दिया जाए कि प्राप्त गुणनखण्ड पूर्ण वर्ग हो जाए?

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 648} \\ 2 \overline{) 324} \\ 2 \overline{) 162} \\ 2 \overline{) 81} \\ 3 \overline{) 27} \\ 3 \overline{) 9} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$$

∴ समूह बनाने के बाद 2 की कमी है।
अतः 2 से गुणा करने पर पूर्ण वर्ग हो जाएगा।

Q 40500 में कौन सी छोटी सं० से भाग कर दिया जाए कि प्राप्त भागफल पूर्ण घन हो जाए?

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 40500} \\ 2 \overline{) 20250} \\ 3 \overline{) 10125} \\ 3 \overline{) 3375} \\ 3 \overline{) 1125} \\ 3 \overline{) 375} \\ 5 \overline{) 125} \\ 5 \overline{) 25} \\ 5 \overline{) 5} \\ 1 \end{array}$$

∴ समूह बनाने के बाद $2 \times 2 \times 3 = 12$ अतिरिक्त है। अतः 12 से भाग देने पर

Q 40500 में कौन सी छोटी संख्या से गुणा कर दिया जाए कि प्राप्त गुणनखण्ड पूर्ण घन हो जाए?

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 40500} \\ 2 \overline{) 20250} \\ 3 \overline{) 10125} \\ 3 \overline{) 3375} \\ 3 \overline{) 1125} \\ 3 \overline{) 375} \\ 5 \overline{) 125} \\ 5 \overline{) 25} \\ 5 \overline{) 5} \\ 1 \end{array}$$

∴ समूह बनाने के बाद $2 \times 3 \times 3 = 18$ कमी है, अतः 18 से गुणा करने पर -

योग-अन्तर पर प्रश्न :-

* ऐसे प्रश्नों को 'भाग-विधि' से हल करते हैं।

* घटायी जाने वाली सं० = शेषफल

* जोड़ी जाने वाली सं० = अन्तिम भागफल को सामान्य से '1' बार अतिरिक्त रखते हैं फिर जिस सं० की कमी हो, वही सं० जोड़ते हैं।

Q 4207 में वह कौन सी छोटी संख्या घटा दी जाए कि प्राप्त भाग पूर्ण वर्ग हो जाए?

$$\begin{array}{r}
 64 \\
 6 \overline{) 4207} \\
 +6 \quad 36 \\
 \hline
 124 \overline{) 607} \\
 \quad 496 \\
 \hline
 \quad 111
 \end{array}$$

$\therefore$ बचायी जाने वाली
 सं० = शेषफल
 $= 111$ Ans

Q- 5740 में वह कौन सी छोटी सं०
 जोड़ दी जाए कि प्राप्त मान पूर्ण
 वर्ग हो जाए?

$$\begin{array}{r}
 76 \\
 7 \overline{) 5740} \\
 +7 \quad 49 \\
 \hline
 146 \overline{) 840} \\
 \quad 876 \\
 \hline
 \quad -36 \text{ कमी}
 \end{array}$$

$\therefore$ 5740 को $(76)^2$ बनाने के
 लिए 36 की कमी है, अतः
 36 जोड़ने पर पूर्ण वर्ग हो जाएगा

Q 5 अंकों की वह अधिकतम सं०
 बताइये जो पूर्ण वर्ग हो?

$$\begin{array}{r}
 316 \\
 3 \overline{) 99999} \\
 +3 \quad 09 \\
 \hline
 51 \overline{) 99} \\
 \quad 61 \\
 \hline
 26 \overline{) 3899} \\
 \quad 3756 \\
 \hline
 \quad 143
 \end{array}$$

$$99999 - 143 = 99856$$

$\therefore 99856 = (316)^2$ का पूर्ण वर्ग है।

27

वर्गों के योग-अन्तरप्रश्न =

Q दो सं० के वर्गों का योग 100 तथा
 वर्गों का अन्तर 28 है, दोनों सं० बताइये।

माना सं० a व b हैं।

$$a^2 + b^2 = 100 \quad \text{--- (i)}$$

$$a^2 - b^2 = 28 \quad \text{--- (ii)}$$

$$2a^2 = 128$$

$$a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 100$$

$$64 + b^2 = 100$$

$$b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$$

सं० = 8 व 6 हैं।

Q दो संख्याओं के वर्गों का योग 580 तथा
 दोनों संख्याओं का
 योग 34 है, तो दोनों संख्याओं का
 गुणनफल बताइये।

माना, संख्याएँ a व b हैं।

$$a^2 + b^2 = 580 \quad \text{--- (i)}$$

$$a + b = 34 \quad \text{--- (ii)}$$

समी० (ii) की वर्ग करने पर-

$$(a + b)^2 = (34)^2$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 1156$$

$$580 + 2ab = 1156$$

$$2ab = 1156 - 580$$

$$2ab = 576$$

$$ab = 288$$

दोनों सं० का गुणनफल = 288 है।

Q दो सं० के वर्गों का अन्तर 145 है, यदि दोनों सं० का योग 29 हो, तो सं० बताइये।

Solⁿ माना, संख्याएँ a व b हैं।

$$a^2 - b^2 = 145 \quad \text{--- (i)}$$

$$a + b = 29 \quad \text{--- (ii)}$$

समी० (i) से —

$$a^2 - b^2 = 145$$

$$(a+b)(a-b) = 145$$

$$29(a-b) = 145$$

$$(a-b) = 5 \quad \text{--- (iii)}$$

समी० (ii) व (iii) से —

$$a + b = 29$$

$$a - b = 5$$

$$2a = 34 \Rightarrow a = 17$$

$$a + b = 29$$

$$17 + b = 29 \Rightarrow b = 12$$

सं० = 17 व 12 हैं।

Q दो क्रमागत सम संख्याओं के वर्गों का अन्तर 84 है, तो छोटी सं० बताइये।

Solⁿ माना क्रमागत सम सं०, x व $(x+2)$

$$\Rightarrow (x+2)^2 - (x)^2 = 84$$

$$\Rightarrow x^2 + 4 + 4x - x^2 = 84$$

$$4x = 80$$

$$x = 20$$

छोटी सं० = 20 व बड़ी सं० = 22

कॉमिल पर ईबाराती प्रश्न: (Word Problem)

'उतना ही जितना'

Q एक सेनानायक प्रत्येक पंक्ति में उतने ही सैनिक खड़े करता है, जितने कि पंक्तियों की सं० है यदि सैनिकों की सं० 961 हो तो पंक्तियों की सं० = ? है।

$$\text{कुल सैनिक} = x^2$$

$$961 = x^2$$

$$x = 31$$

पंक्तियों की सं० = 31

Q एक सेनानायक प्रत्येक पंक्ति में उतने ही सैनिक खड़े करता है, जितने कि पंक्तियों की संख्या है, तथा आन्तिम पंक्ति के बाद 8 सैनिक बच जाते हैं। यदि पंक्तियों की सं० 17 हो तो सैनिकों की सं० है।

$$\text{कुल सैनिक} = 17 \times 17 + 8$$

$$= 289 + 8$$

$$= 297$$

Q किसी कक्षा में कुछ विद्यार्थी हैं, प्रत्येक विद्यार्थी किसी राहत फण्ड के लिए ₹ 25-25 पैसे के उतने ही सिक्के जमा करते हैं। जितने कि विद्यार्थियों की सं० यदि राहत फण्ड में 400 रु हुए हो तो विद्यार्थियों की सं० बताइये।

$$\frac{x^2}{4} = 400$$

$$x^2 = 1600$$

$$x = 40$$

विद्यार्थी की सं० = 40

⇒ 25 पैसे के लिए—

$$\frac{x^2}{4} = \text{कुल रुपये}$$

⇒ 50 पैसे के लिए—

$$\frac{x^2}{2} = \text{कुल रुपये}$$

माना विद्यार्थी की सं० = x

तब प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा जमा सिक्के = x

$$\therefore \text{कुल सिक्के} = x \times x = x^2 \text{ (25 पैसे)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} = 400$$

$$\Rightarrow x^2 = 1600$$

$$x = 40$$

किसी कक्षा में कुछ विद्यार्थी हैं प्रत्येक विद्यार्थी किसी राहत फंड के लिए 50-50 पैसे के उतर्ने ही सिक्के जमा करते हैं, जितने कि विद्यार्थियों की सं० है। यदि राहत फंड में 1250 क जमा हुए हों तो विद्यार्थियों की सं० बताइए।

$$\frac{x^2}{2} = 1250$$

$$x^2 = 2500$$

$$x = 50$$

विद्यार्थियों की सं० = 50

अनुपात - समानुपात (Ratio & Proportion)

समानुपात = जब दो अनुपाती राशियाँ आपस में बराबर हो तो इसे समानुपात कहते हैं।

$$a : b = c : d$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \boxed{ad = bc}$$

अर्थात् समानुपाती पदों में,

$$\boxed{\text{बाह्य पदों का गुणनफल} = \text{अंतः पदों का गुणनफल}}$$

युग्मित अनुपात से सम्मिलित अनुपात बनाते:

यदि $a : b = 3 : 4$ तथा $b : c = 5 : 2$ हो तो $a : b : c = ?$

Solⁿ - 1st method (Quiz method) =

$$a : b : c$$

$$3 \quad 4 \quad \boxed{4}$$

$$\boxed{5} \quad 5 \quad 2$$

$$15 : 20 : 8$$

2nd method (Arrow method) =

$$a : b : c$$

$$3 \quad 4 \quad 2$$

$$\searrow \quad \nearrow \quad \nearrow$$

$$15 : 20 : 8$$

Q यदि $w_2 : w_1 = 2 : 3$ तथा $w_1 : w_3 = 5 : 7$ तो $w_1 : w_2 : w_3 = ?$

$$\begin{array}{ccc} w_1 & : & w_2 & : & w_3 \\ 2 & & 3 & & 3 \\ 5 & & 5 & & 7 \\ \hline 10 & : & 15 & : & 21 \end{array}$$

$\therefore w_1 : w_2 : w_3 = 10 : 15 : 21$

Q यदि $a : b = 2 : 3$, $b : c = 5 : 6$ तथा $c : d = 7 : 3$ हो तो $a : d = ?$

$$\begin{array}{cccc} a & : & b & : & c & : & d \\ 2 & & 3 & & 3 & & 3 \\ 5 & & 5 & & 6 & & 6 \\ 7 & & 7 & & 7 & & 3 \end{array}$$

$70 : 105 : 126 : 54$

$\therefore a : d = 70 : 54$

$a : d = 35 : 27$

Note = भिन्न-भिन्न अनुपात को सरल अनुपात में बदलने के लिए हर के ल०स० से सभी अनुपातों में गुणा करते हैं।

Q $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$

ल०स० = 12

$\frac{1}{2} \times 12 : \frac{1}{3} \times 12 : \frac{1}{4} \times 12$

$= 6 : 4 : 3$

Q यदि $a : b = \frac{2}{3} : \frac{5}{6}$ तथा $b : c = \frac{7}{12} : \frac{3}{4}$ हो तो $a : b : c = ?$

$a : b = \frac{2}{3} \times 6 : \frac{5}{6} \times 6$
 $= 4 : 5$

$b : c = \frac{7}{12} \times 12 : \frac{3}{4} \times 12$
 $= 7 : 9$

$a : b : c$
 $4 : 5 : 9$

$28 : 35 : 45$

$a : b : c = 28 : 35 : 45$

Note - जब तीन या तीन से अधिक व्यंजक आपस में बराबर हो ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिए constant का प्रयोग करते हैं।

Q यदि $2A = 3B = 5C$ तो $A :$

माना, $2A = 3B = 5C = K$

$2A = K$

$A = K/2$

$3B = K$

$B = K/3$

$5C = K$

$C = K/5$

$$A:B:C = \frac{K}{2} : \frac{K}{3} : \frac{K}{5}$$

$$= \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{2} \times 30 : \frac{1}{3} \times 30 : \frac{1}{5} \times 30$$

$$A:B:C = 15:10:6$$

Short method

$$2A = 3B = 5C$$

$$A:B:C = 15:10:6$$

अर्थात् जिसका Ratio लिखना हो.
उसके अलावा पदों का आपस
मे गुणा करके लिख देते हैं।

यदि $3A = 4B$ तथा $5B = 7C$
तो $A:B:C = ?$

$$3A = 4B \text{ तब } A:B = 4:3$$

$$5B = 7C \text{ तब } B:C = 7:5$$

$$A:B:C$$

$$4 \quad 3 \quad 3$$

$$7 \quad 17 \quad 5$$

$$28:21:15$$

$$A:B:C = 28:21:15$$

यदि $a:b:c = 2:3:4$ हो तो $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$
का मान बताइये?

$$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c} = \frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \times 12 : \frac{1}{3} \times 12 : \frac{1}{4} \times 12$$

$$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c} = 6:4:3$$

अनुपाती संख्याये ज्ञात करना :-

यदि $x:y = 3:1$ हो तो (x^2+y^2)
: (x^2-y^2)
का मान ज्ञात
कीजिए।

$$x=3$$

$$y=1$$

$$\therefore \frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)} = ?$$

$$= \frac{3^2+1^2}{(3^2-1^2)} = \frac{9+1}{9-1} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{5}{4}$$

यदि $\frac{3a+2b}{2a-b} = \frac{4}{3}$ हो तो $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = ?$

$$\Rightarrow \frac{3a+2b}{2a-b} \times \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 9a+6b = 8a-4b$$

$$\Rightarrow a = -10b$$

$$\frac{a}{b} = -10$$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^2 = (-10)^2 = 100$$

माना प्रत्येक पद में x जोड़ दें-

$$(9+x) : (12+x) = (17+x) : (22+x)$$

$$(9+x) \times (22+x) = (12+x) \times (17+x)$$

$$198 + 9x + 22x + x^2 = 204 + 12x + 17x + x^2$$

$$31x - 29x = 204 - 198$$

$$2x = 6$$

$$\text{अतः } x = 3$$

सं० 29, 19, 14 व 10 के प्रत्येक पद में कितना घटा दिया जाये कि सं० समानुपाती हो जाये?

- (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

Option से - (c) से

$$\begin{array}{cccc} 29 & 19 & 14 & 10 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \\ \hline 25 & 15 & 10 & 6 \end{array} \quad (ad = bc)$$

150

* योग व अन्तर पर प्रश्न (Case-II)

संख्याएँ ज्ञात करना =

दो संख्याओं का अनुपात 3:4 है, जब इनके प्रत्येक पद में 5 जोड़ दिया जाता है तो इन संख्याओं का अनुपात 10:13 हो जाता है, तो दोनों संख्याओं बताइए।

माना सं० क्रमशः $3x$ व $4x$ हैं।

$$(3x+5) : (4x+5) = 10 : 13$$

$$(3x+5) \times 13 = (4x+5) \times 10$$

$$39x + 65 = 40x + 50$$

$$x = 15$$

$$\text{सं०} = 3x = 3 \times 15 = 45$$

$$= 4x = 4 \times 15 = 60$$

Option से भी कर सकते हैं।

दो संख्याओं का अनुपात 4:5 है।

जब इसके प्रत्येक पद में 5 घटा दिया जाता है, तो इन संख्याओं का अनुपात 7:9 हो जाता है, तो दो संख्याएँ बताइए।

माना संख्याएँ क्रमशः $4x$ व $5x$ हैं।

$$(4x-5) : (5x-5) = 7 : 9$$

$$(4x-5) \times 9 = (5x-5) \times 7$$

$$36x - 45 = 35x - 35$$

$$x = 10$$

$$\text{सं०} = 4x = 4 \times 10 = 40$$

$$5x = 5 \times 10 = 50$$

* योग, अन्तर व गुणा पर प्रश्न =

दो संख्याओं का अनुपात 2:5 है।

यदि दोनों संख्याओं का योगफल 1120 हो तो दोनों संख्याएँ बताइए?

माना संख्याएँ क्रमशः $2x$ व $5x$ हैं।

$$(2x+5x) = 1120$$

$$7x = 1120$$

$$x = 160$$

$$\text{सं०} = 2x = 2 \times 160 = 320$$

$$= 5x = 5 \times 160 = 800$$

Q दो संख्याओं का अनुपात 3:5 है।
यदि दोनों संख्याओं का गुणनफल 240
हो तो, दोनों संख्याएँ बताइए।

माना संख्याएँ क्रमशः $3x$ व $5x$ हैं।

$$3x \times 5x = 240$$

$$x^2 = \frac{240}{3 \times 5}$$

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{सं०} = 3x = 3 \times 4 = 12$$

$$= 5x = 5 \times 4 = 20$$

Q तीन संख्याओं का अनुपात 3:4:5 है।
यदि तीनों सं० के वर्गों का योगफल
800 हो तो इनमें से बड़ी संख्या
बताइए।

माना संख्याएँ क्रमशः $3x$, $4x$ व $5x$ हैं।

$$\Rightarrow (3x)^2 + (4x)^2 + (5x)^2 = 800$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 16x^2 + 25x^2 = 800$$

$$50x^2 = 800$$

$$x^2 = \frac{800}{50} \Rightarrow x^2 = 16$$

$$x = 4$$

$$\text{सं०} = 3x = 3 \times 4 = 12$$

$$= 4x = 4 \times 4 = 16$$

$$= 5x = 5 \times 4 = 20$$

बड़ी सं० = 20 है।

समानुपाती विभाजन पर प्रश्न =

Step-1 $\rightarrow$ अनुपात

Step-2 $\rightarrow$ अनुपाती योग

Step-3 $\rightarrow$ $\frac{\text{अनुपात}}{\text{योग}} \times \text{कुल सं०}$

Q 7000 ₹ को A, B व C में इस प्रकार
बाँटा गया कि $A:B = 5:4$ तथा
 $B:C = 3:2$ के अनुपात में रूप में
मिले तो C की राशि कितनी है।

$$A : B : C$$

$$5 : 4 : 4$$

$$3 : 3 : 2$$

$$15 : 12 : 8$$

$$\text{अनुपात योग} = 35$$

$$C = \frac{8}{35} \times 7000 = 1600 \text{ ₹}$$

Q 7800 ₹ को A, B व C में $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$
के अनुपात में बाँटा गया तो बताइए
A को C से कितने रुपये अधिक मिले।

$$A : B : C = \frac{1}{2} \times 12 : \frac{1}{3} \times 12 : \frac{1}{4} \times 12$$

$$= 6 : 4 : 3$$

$$\text{अनुपाती योग} = 13$$

$$(A - C) = \frac{6-3}{13} \times 7800 = 1800 \text{ ₹}$$

Q 7600 ₹ A, B व C में इस प्रकार बाँटा गया कि A की राशि का दो गुना B की राशि का 4 गुना व C की राशि का 5 गुना आपस में बराबर था, तो B = ?

$$2A = 4B = 5C$$

$$A : B : C = 20 : 10 : 8 \text{ (Mido method से)}$$

$$\text{अनुपाती योग} = 38$$

$$B = \frac{10}{38} \times 7600 = 2000 \text{ ₹}$$

$$B \text{ की राशि} = 2000 \text{ ₹} \therefore$$

Q 8000 ₹ को P, Q व R में इस प्रकार बाँटा गया कि P को Q का दो गुना तथा Q को R का आधा मिला तो Q की राशि कितनी है।

$$P : Q = 2 : 1$$

$$Q : R = 1 : 2$$

$$P : Q : R$$

$$2 : 1 : 1$$

$$1 : 1 : 2$$

$$2 : 1 : 2$$

$$\Rightarrow \text{अनुपाती योग} = 5$$

$$Q \text{ की राशि} = \frac{1}{5} \times 8000 = 1600 \text{ ₹}$$

Q 234 ₹ को A, B व C में $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$

के अनुपात में बाँटा जाना था, परन्तु गलती से यह राशि 2 : 3 : 4 के अनुपात में बाँट दी गई, तो बताइये इस स्थिति में सबसे अधिक किसे और किसे रु० का लाभ होगा

सही — का अनुपात

$$A : B : C = \frac{1}{2} \times 12 : \frac{1}{3} \times 12 : \frac{1}{4} \times 12$$

$$= 6 : 4 : 3$$

$$\text{अनुपाती योग} = 13$$

$\Rightarrow$ गलत — का अनुपात

$$A : B : C = 2 : 3 : 4$$

$$\text{अनुपाती योग} = 9$$

सही का अनुपात —

$$A = \frac{6}{13} \times 234$$

$$= 108$$

$$B = \frac{4}{13} \times 234 = 72$$

$$C = \frac{3}{13} \times 234 = 54$$

गलत का अनुपात —

$$A = \frac{2}{9} \times 234 = 52$$

$$B = \frac{3}{9} \times 234 = 78$$

$$C = \frac{4}{9} \times 234 = 104$$

सही व गलत की तुलना करें पर C को सबसे अधिक और 50 ₹ का लाभ होगा।

सिक्कों पर प्रश्न - (Coin based Ques)

Case-I

Q किसी थैली में 1 ₹, 50 पैसे व 25 पैसे के सिक्के 2:3:4 के अनुपात में रखे हैं। यदि थैली में कुल 180 ₹ हो तो बताइये 50 पैसे के कितने सिक्के हैं? माना इन सिक्कों की सं० = $2x$, $3x$ व $4x$ हैं।

$$2x + \frac{3x}{2} + \frac{4x}{4} = 180$$

$$8x + 3x + 4x = 180 \times 4$$

$$18x = 180 \times 4$$

$$x = \frac{180 \times 4}{18} = 40$$

$$50 \text{ पैसे के सिक्के} = 3 \times x = 3 \times 40 = 120$$

Q किसी थैली में 1 ₹, 50 पैसे, 25 पैसे व 10 पैसे के सिक्के 6:8:10:15 के अनुपात में रखे हैं, यदि थैली में कुल 126 ₹ हो तो बताइये 50 पैसे के कितने सिक्के हैं?

माना इन सिक्कों की संख्या क्रमशः

$$6x, 8x, 10x \text{ व } 15x \text{ हैं।}$$

$$6x + \frac{8x}{2} + \frac{10x}{4} + \frac{15x}{10} = 126$$

$$12x + 80x + 50x + 30x = 126$$

$$\begin{array}{r} 14 \times 20 \\ 280x = 126 \\ 26 \end{array}$$

$$x = \frac{126}{14} = 9$$

$$\begin{aligned} 50 \text{ पैसे के सिक्के} &= 8x \\ &= 8 \times 9 \\ &= 72 \end{aligned}$$

Q किसी थैली में 1 ₹, 50 पैसे व 25 पैसे के सिक्के 1:4:4 के अनुपात में रखे हैं, यदि थैली में कुल 200 ₹ हो तो बताइये 50 पैसे के कितने सिक्के हैं?

माना इन सिक्कों की सं० क्रमशः x , $4x$ व $4x$ हैं।

$$x + \frac{4x}{2} + \frac{4x}{4} = 200$$

$$4x + 8x + 4x = 200 \times 4$$

$$16x = 800$$

$$x = 50$$

$$\begin{aligned} 50 \text{ पैसे के सिक्के} &= 4x \\ &= 4 \times 50 = 200 \end{aligned}$$

Case-II

Q किसी थैली में 1 ₹, 50 पैसे व 25 पैसे के कुल 394 सिक्के हैं, यदि इन सिक्कों की मूल्यों में अनुपात 7:11:13 हो तो 1 ₹ के कुल कितने सिक्के हैं?

$$\text{मूल्यों में अनुपात} = 7:11:13$$

$$\begin{array}{ccc} \times 1 & \times 2 & \times 4 \\ 7 & 22 & 52 \end{array}$$

$$\text{सिक्कों का अनुपात} = 7:22:54$$

$$\begin{aligned} \text{अनुपाती योग} &= 81 \\ 1 \text{ ₹ के सिक्के} &= \frac{7}{81} \times 394 \\ &= 28 \end{aligned}$$

Q किसी थैली में ₹ 50 पैसे व 25 पैसे के कुल 133 सिक्के हैं, यदि इन सिक्कों की शूल्यों में अनुपात 5:3:2 हो तो 50 पैसे के कुल कितने सिक्के होंगे?

$$\text{शूल्यों का अनुपात} = 5:3:2$$

$$\times 1 \downarrow \times 3 \downarrow \times 2 \downarrow$$

$$\text{सिक्कों का अनुपात} = 5:6:8$$

$$\text{अनुपाती योग} = 19$$

$$50 \text{ पैसे के सिक्के} = \frac{6}{19} \times 133$$

$$= 42$$

आय व व्यय पर प्रश्न =

Q A व B के आय का अनुपात 3:2 तथा व्यय का अनुपात 2:1 है, यदि दोनों में प्रत्येक की बचत 4000 ₹ हो तो A की आय क्या होगी?

माना, दोनों की आय क्रमशः 3x व 2x ₹ है।

तथा दोनों का व्यय क्रमशः 2y व y है।

$$3x - 2y = 4000 \quad (i)$$

$$2x - y = 4000 \quad (ii)$$

$$3x - 2y = 4000$$

$$4x - 2y = 8000$$

$$- \quad + \quad -$$

$$-x = -4000$$

$$A \text{ की आय} = 4000 \times 3$$

$$= 12000 \text{ ₹}$$

Q यदि A व B के आय का अनुपात 5:3 तथा व्यय का अनुपात 9:5 है।

यदि दोनों की बचत क्रमशः 1300 ₹ व 900 ₹ हो तो B की आय कितना है।

माना, दोनों की आय क्रमशः 5x व 3x ₹ है।

$$\frac{5x - 1300}{3x - 900} = \frac{9}{5}$$

$$25x - 6500 = 27x - 8100$$

$$2x = 1600$$

$$x = 800$$

$$B \text{ की आय} = 3x$$

$$= 3 \times 800 = 2400 \text{ ₹}$$

विविध प्रश्न - (miscellaneous ques)

Q एक व्यक्ति अपनी यात्रा बस, कार व ट्रेन से तय करता है, यदि इन साधनों के चालों का अनुपात 3:2:5 तथा इन साधनों द्वारा लिये गए समयों का अनुपात 4:5:6 हो तो इन साधनों द्वारा तय की गई दूरियों का अनुपात बताइये?

$$\text{चाल का अनुपात} = 3:2:5$$

$$\text{समय का अनुपात} = 4:5:6$$

$$\text{दूरी} = \text{चाल} \times \text{समय}$$

$$\text{दूरी का अनुपात} = 3 \times 4 : 2 \times 5 : 5 \times 6$$

$$= 12 : 10 : 30$$

$$= 6 : 5 : 15$$

Q किसी पुस्तकालय में हिन्दी, अंग्रेजी व गणित की पुस्तकों की संख्या का अनुपात 7:3:4 है। यदि हिन्दी की पुस्तक, गणित की पुस्तक से 120 अधिक हो तो पुस्तकालय में कितनी पुस्तक है।

माना इन पुस्तकों की संख्या क्रमशः

7x, 3x व 4x हैं।

प्रश्नानुसार,

$$7x - 4x = 120$$

$$3x = 120$$

$$x = 40$$

$$\text{Total पुस्तक} = 7x + 3x + 4x$$

$$= 14x$$

$$= 14 \times 40$$

$$= 560 \text{ पुस्तक}$$

Q किसी कक्षा में कुल 36 विद्यार्थी हैं, जिसमें लड़के व लड़कियों की संख्या का अनुपात 3:1 है, कक्षा में कितनी लड़कियाँ और दाखिला करा ले, कि इसकी सं० का अनुपात 3:5 हो जाए।

$$T. \text{ student} = 36$$

$$B: G = 3:1$$

$$\text{अनुपाती यौग} = 4$$

$$\text{लड़कों की सं०} = \frac{3}{4} \times 36 = 27$$

$$\text{लड़कियों की सं०} = \frac{1}{4} \times 36 = 9$$

माना, x लड़कियाँ और दाखिला करा ले

$$\frac{B}{G} \Rightarrow \frac{27}{9+x} = \frac{3}{5}$$

$$135 = 81 + 9x$$

$$54 = 9x$$

$$x = 6$$

$$\text{लड़कियाँ} = 6 \text{ Ans}$$

Percentage (प्रतिशत)

* 'का' से सम्बन्धित:-

का $\rightarrow$ का कितने % हैं।

* x, y का कितने % हैं।

माना,

x, y का P % है

$$x = y \times \frac{P}{100}$$

$$\boxed{\frac{x \times 100}{y} = P}$$

* x का कितने % y है।

माना

x का P % ; y है।

$$x \times \frac{P}{100} = y$$

$$\boxed{P = \frac{y \times 100}{x}}$$

* x %, y % का कितने % हैं।

माना

x %, y % का P % है।

$$\frac{x}{100} = \frac{y}{100} \times \frac{P}{100}$$

$$\boxed{P = \frac{x \times 100}{y}}$$

Note -

'का कितने हैं' को हल करने के लिए जिस element के साथ 'का' शब्द लगा हो उसे हर में रखते हैं और बचे हुए Element को अंश में रखकर 100 से गुणा करें।

Q 6 Kg का कितने %, 750 gm है।
 $6 \text{ Kg} = 6000 \text{ gm}$

$$\% = \frac{750 \times 100}{6000}$$

$$= \frac{25}{2} \times 100 = \frac{25}{2}$$

$$= 12.5\%$$

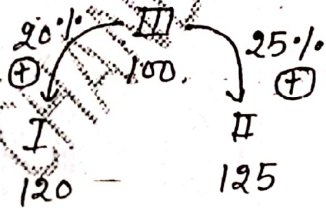
Q 90 sec, 1 Hr 40 min का कितने % है।

$$\% = \frac{90 \text{ sec} \times 100}{1 \text{ Hr } 40 \text{ min}} = \frac{1.5 \text{ min} \times 100}{60 \text{ min} + 40 \text{ min}}$$

$$= \frac{1.5 \text{ min} \times 100}{100 \text{ min}}$$

$$= 1.5\%$$

Q दो संख्याएँ किसी तीसरी संख्या से क्रमशः 20% व 25% अधिक हैं तो बताइये पहली संख्या, दूसरी संख्या का कितने % है।

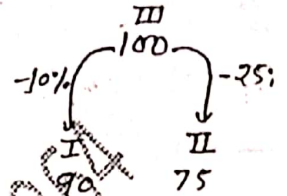


I	II	III
120	125	100

पहली सं०, दूसरी संख्या का कितने % है।

$$\% = \frac{120 \times 100}{125} = 96\%$$

Q दो संख्याएँ किसी तीसरी संख्या से क्रमशः 10% व 25% कम हैं तो बताइये पहली सं० का कितने %, दूसरी संख्या है।



I	II	III
90	75	100

पहली सं० का कितने %, दूसरी सं० है।

$$\% = \frac{90 \times 100}{100} = 90\%$$

$$= 83\frac{1}{3}\%$$

* % वृद्धि और % कमी की अवधारणा =

Q किसी नगर की जनसंख्या 60,000 से बढ़कर 64,000 हो जाता है, तो जनसंख्या में कितने % की वृद्धि हुई?

$$= 64000 - 60000 = 4000 \text{ बढ़ा}$$

$$\% = \frac{4000 \times 100}{60000} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}\%$$

वृद्धि

Q चावल का मूल्य 15 ₹/Kg से घटकर 12 ₹/Kg हो जाता है, तो इसके मूल्य में कितने % की कमी हुई?

$$\Rightarrow 15 \text{ Rs/Kg} \rightarrow 12 \text{ Rs/Kg}$$

$$\Rightarrow \% \text{ कमी} = \frac{3}{15} \times 100 = 20\%$$

* % वृद्धि और % कमी की समझना =

"से" से सम्बन्धित प्रश्न =

Q दो संख्याएँ किसी तीसरी संख्या से क्रमशः 10% व 25% कम हैं, तो बताइए पहली सं०, इसरी संख्या से कितने % अधिक है?

I	II	III
90	75	100
+15		

$$\% \text{ अधिक} = \frac{15}{75} \times 100 = 20\%$$

Q दो संख्याएँ किसी तीसरी संख्या से क्रमशः 60% व 80% हैं, तो बताइए पहली संख्या, इसरी संख्या से कितने % कम है।

I	II	III
60	80	100

$$\% \text{ कम} = \frac{20}{80} \times 100 = 25\%$$

% वृद्धि पर प्रश्न =

Note = ऐसे प्रश्नों में % वृद्धि दिया होता है जबकि % कमी ज्ञात करना होता है, और यह -

$$\% \text{ कमी} = \frac{100x}{100+x} \quad \text{कै बराबर होता है}$$

$$x \Rightarrow \% \text{ वृद्धि}$$

Q चीनी की मूल्य में 25% की वृद्धि हो जाती है, तो बताइए इसके खप में कितने % की कमी कर दिया जाए कि इस मद पर होने वाला व्यय अपरिवर्तित रहे?

$$\% \text{ कमी} = \frac{100 \times 25}{100+25} = \frac{2000}{125} = 20\%$$

Q किसी आयताकार मैदान की लम्बाई 20% बढ़ा दी जाती है, तो इसके चौ में कितने % की कमी कर दें कि मैदान का क्षेत्रफल अपरिवर्तित रहे।

$$\% \text{ कमी} = \frac{100 \times 20}{120} = \frac{100}{6} = 16\frac{4}{6}\% = 16\frac{2}{3}\%$$

% कमी पर प्रश्न =

Note - ऐसे प्रश्नों में % कमी दी होता है, जबकि % वृद्धि ज्ञात करना होता है और यह -

$$\% \text{ वृद्धि} = \frac{100x}{100-x}$$

$$x \Rightarrow \% \text{ कमी}$$

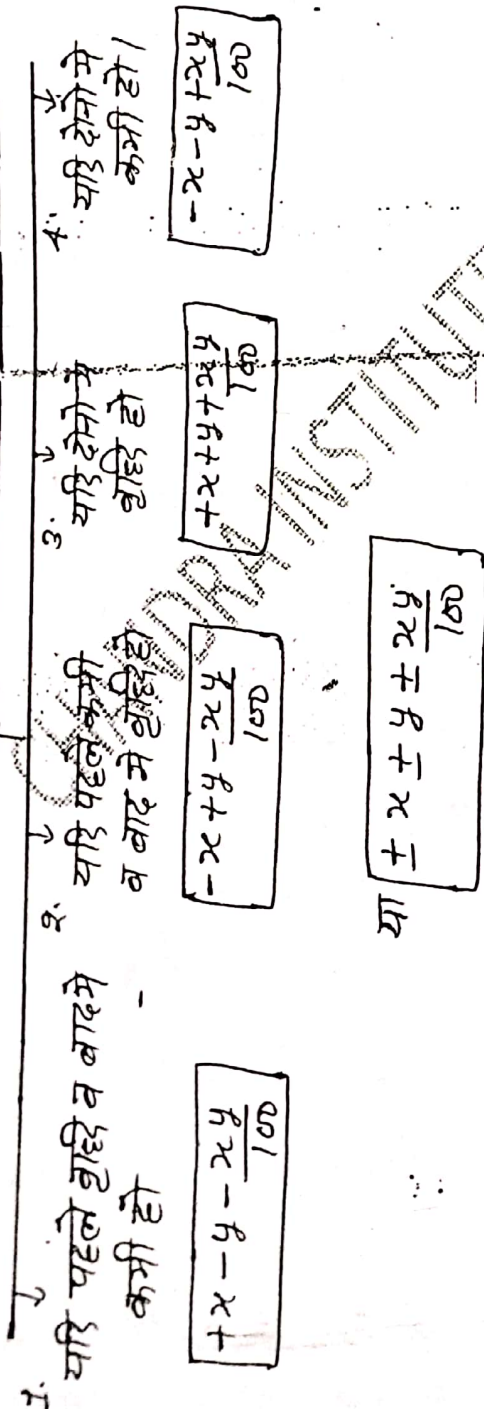
Q A की आय, B की आय से 30% कम है तो बताइये B की आय A की आय से कितने % अधिक है।

$$\% \text{ वृद्धि} = \frac{100 \times x}{100 - 30}$$

$$= \frac{100 \times 30}{70} = 42\frac{6}{7} \%$$

* % वृद्धि और % कमी दोनों पर प्रश्न

% वृद्धि और % कमी दोनों पर प्रश्न



Q किसी वस्तु के मूल्य में 10% की कमी हो जाने से ग्राहको की संख्या 25% बढ़ जाती है, तो दुकानदार के आय में कुल कितने % वृद्धि / कमी होगी?

$$R = -10 + 25 - \frac{10 \times 25}{100}$$

$$= +15 - 2.5$$

$$= 12.5\% \text{ की वृद्धि।}$$

Q एक दुकानदार किसी वस्तु का अंकिमूल्य इसके क्रयमूल्य से 25% बढ़ाकर रखता है, फिर वह हुए मूल्य में वह अपने ग्राहकों को 10% छूट देता है, फिर भी उसे 10% लाभ बचता है, तो वह ग्राहक को कितने % छूट देता है।

$$+10 = +25 - x - \frac{x \times x}{100}$$

$$10 - 25 = -\frac{4x - x}{4}$$

$$-15 = \frac{-5x}{4} \Rightarrow 60 = 5x$$

$$x = 12\% \text{ छूट}$$

* क्षेत्रफल (2-1) में % परिवर्तन से प्रश्न

Q वर्ग की किसी भुजा को 20% बढ़ा दिया जाता है, तो उसके क्षेत्रफल में कितने % की वृद्धि होगी?

$$\text{क्षेत्रफल} = 20 + 20 + \frac{20 \times 20}{100}$$

$$= 40 + 4 = 44\% \text{ वृद्धि}$$

Q किसी वृत्त की लंबाई को 10% कम कर दिया जाता है तो -

1. क्षेत्रफल में कितने % की कमी होगी
2. इसके परिधि में कितने % की कमी होगी

$$\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$

$$\text{क्षेत्रफल} = -10 - 10 + \frac{10 \times 10}{100}$$

$$= -20\% \text{ की कमी}$$

$$= -10\% \text{ की कमी}$$

$$\text{वृत्त की परिधि} = 2\pi r$$

$$= -10\% \text{ की कमी होगी}$$

Q किसी समबाहु त्रिभुज के भुजा में 30% की वृद्धि कर दिया जाता है तो

1. क्षेत्रफल में कितने % की वृद्धि होगी

2. परिमाण में कितने % की वृद्धि होगी

$$\text{समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\% \text{ क्षेत्रफल} = \frac{+30 + 30 + \frac{30 \times 30}{100}}{100}$$

$$= 60 + 9 = 69\% \text{ वृद्धि}$$

$$\% \text{ परिमाण} = 30$$

$$= +30\% \text{ की वृद्धि होगी}$$

* आयतन (3-D) % परिवर्तन से प्रश्न

Q किसी कगरे की लम्बाई व चौड़ाई क्रमशः 10% व 20% बढ़ाकर ऊँचाई को 25% कम कर दिया जाता है तो इसके आयतन में कितने % की वृद्धि / कमी होगी?

$$\text{कगरे का आयतन} = l \times b \times h$$

$$= 100\% \times 200\% \times 100\%$$

$$R = 10 + 20 + \frac{20 \times 10}{100}$$

$$= 30 + 2$$

$$= 32\% \text{ वृद्धि}$$

$$R_1 = 32 - 25 - \frac{25 \times 25}{100}$$

$$= 7 - 6 = -1 \text{ की कमी}$$

$$= \text{आयतन में 1\% की कमी होगी}$$

Q किसी बेलन की लंबाई 50% कम करके ऊँचाई को 200% बढ़ा दिया जाता है, तो इसके आयतन में कितने % की वृद्धि / कमी होगी?

$$\text{बेलन का आयतन} = \pi r^2 h$$

$$R = -50 - 50 + \frac{50 \times 50}{100}$$

$$= -100 + 25 = -75 \text{ की कमी}$$

$$R_1 = -75 + 200 - \frac{75 \times 200}{100}$$

$$= 125 - 150$$

$$= -25 \text{ की कमी होगी}$$

अतः वेलन की आयतन में 25% की कमी होगी।

Q किसी घन की प्रत्येक भुजा 20% बढ़ा दी जाती है तो-

1. इसके सम्पूर्ण पृष्ठ के क्षेत्रफल में कितने% वृद्धि होगी।

2. आयतन में कितने% की वृद्धि होगी?

$$\text{क्षेत्रफल} = 6a^2$$

$$\begin{aligned} \% \text{ क्षेत्रफल} &= \frac{+20 + 20 + \frac{20 \times 20}{100}}{100} \\ &= 40 + 4 = 44\% \text{ की वृद्धि} \end{aligned}$$

$$\text{आयतन} = a^3$$

$$R = \frac{+30 + 30 + \frac{30 \times 30}{100}}{100}$$

$$= 44\%$$

$$R_1 = \frac{44 + 30 + \frac{44 \times 30}{100}}{100}$$

$$= 64 + 4.4$$

$$= 68.4\% \text{ की वृद्धि}$$

घन के आयतन में = 68.4% की वृद्धि होगी।

* परीक्षा से प्रश्न—

1. जब दो विषयों का मिश्र हो-

2. जब किसी एक विद्यार्थी का मिश्र हो।

3. जब दो विद्यार्थियों का मिश्र हो-

4. मिश्रित प्रश्न

* 1. जब दो विषयों का मिश्र हो=

Q किसी परीक्षा में Hindi व English में क्रमशः 75% व 80% छात्र उत्तीर्ण हुये। यदि दोनों विषयों में 10% छात्र अनुत्तीर्ण हुये हों तो परीक्षा में कितने% छात्र अनुत्तीर्ण हुये?

	Pass	Fail
हिंदी	75%	25%
अंग्रेजी	80%	20%

दोनों में Fail = 10%

$$\therefore \text{कुल Fail \%} = (25 + 20 - 10)\% = 35\%$$

कुल Fail \% = I विषय में Fail \% + II विषय में Fail \% - दोनों में Fail \%

कुल Pass \% = I विषय में Pass \% + II विषय में Pass \% - दोनों में Pass \%

Q किसी परीक्षा में अंग्रेजी व गणित में क्रमशः 70% व 80% उत्तीर्ण हुए यदि दोनों विषयों में 10% छात्र Fail हुए तथा कुल Fail छात्रों की सं० 360 हो तो परीक्षा में कितने छात्र सम्मिलित हुए।

Solⁿ

$$\text{कुल Fail} = (30\% + 20\% - 10\%) \\ = 40\%$$

$$40\% = 360$$

$$1\% = \frac{360}{40}$$

$$100\% = \frac{360}{40} \times 100$$

$$\text{कुल सम्मिलित} = 900 \text{ छात्र}$$

Q - जब किसी स्कूल विद्यार्थी का चित्र हो-

Q किसी परीक्षा में पास होने के लिए 36% अंक आवश्यक थे। इस परीक्षा में एक छात्र को 95 अंक मिले, किन्तु वह 13 अंक से Fail हो गया, तो परीक्षा का पूर्णांक बताइये?

$$\text{परीक्षा का न्यूनतम उत्तीर्णक} = 95 + 13 \\ = 108$$

$$36\% = 108$$

$$1\% = \frac{108}{36} = 3$$

$$100\% = 300 \text{ अंक}$$

Q किसी परीक्षा में पास होने के लिए 40% आवश्यक थे इस परीक्षा में एक छात्र को 256 अंक मिले जो न्यूनतम उत्तीर्णक से 16 अंक ज्यादा था तो परीक्षा का पूर्णांक बताइये।

$$\text{परीक्षा का न्यूनतम उत्तीर्णक} = 256 - 16 \\ = 240$$

$$40\% = 240$$

$$100\% = \frac{240}{40} \times 100 = 600$$

परीक्षा से प्रश्न-

Q जो दो विद्यार्थियों का चित्र हो-

Q-1 जब एक छात्र पास व दूसरा छात्र

I	II
पास $\Rightarrow$ फेल $\Leftrightarrow$ अंको का योग	
फेल $\Rightarrow$ पास $\Leftrightarrow$ अंको का योग	

Q-2 जब दोनों छात्र पास व दोनों छात्र Fail हो-

I	II
पास $\Rightarrow$ पास $\Leftrightarrow$ अंको का अन्तर	
फेल $\Rightarrow$ फेल $\Leftrightarrow$ अंको का अन्तर	

Q किसी परीक्षा में A को 35% अंक मिले और वह परीक्षा में 20 अंक से फेल हो गया, उसी परीक्षा में B को 50% अंक मिले जो न्यूनतम उत्तीर्णक से 40 अंक ज्यादा था।

तो - (i) परीक्षा का पूर्णांक = ?

(ii) परीक्षा का न्यूनतम उत्तीर्णक

(iii) परीक्षा का % न्यूनतम उत्तीर्णक

$$A = 35\% \rightarrow 20 \text{ अंक Fail}$$

$$B = 50\% \rightarrow 40 \text{ अंक ज्यादा}$$

$$\Rightarrow 15\% = 60 \text{ अंक}$$

$$1\% = 4 \text{ अंक}$$

$$100\% = 400 \text{ अंक}$$

(i) परीक्षा का पूर्णांक = 400 अंक

$$(ii) \text{ परीक्षा का न्यूनतम उत्तीर्णक} = \\ = 400 \times \frac{35}{100} + 20 \\ = 140 + 20 = 160$$

(iii) % न्यूनतम उत्तीर्णक =

$$= \frac{160 \times 100}{400}$$

$$= 40\%$$

Q किसी परीक्षा में A व B को क्रमशः 45% व 60% अंक मिला जो न्यूनतम उत्तीर्णक से क्रमशः 20 अंक व 65 अंक ज्यादा था तो —

(i) परीक्षा का पूर्णांक

(ii) परीक्षा का न्यूनतम उत्तीर्णक

(iii) % न्यूनतम उत्तीर्णक = ?

A → 45% → 20 अंक ज्यादा

B → 60% → 65 अंक ज्यादा

$$15\% \rightarrow 45$$

$$1\% \rightarrow 3 \text{ अंक}$$

$$100\% \rightarrow 300 \text{ अंक}$$

परीक्षा का पूर्णांक = 300 अंक

परीक्षा का न्यूनतम उत्तीर्णक =

$$A \text{ से } \Rightarrow \frac{300 \times 45}{100} - 20$$

$$= 135 - 20 = 115$$

% न्यूनतम उत्तीर्णक =

$$= \frac{115}{300} \times 100 = \frac{115}{3}$$

$$= 38\frac{1}{3}\%$$

Q किसी परीक्षा में A को 20% अंक मिला और वह 30 अंक से Fail हो गया, उसी परीक्षा में B को 32% अंक मिला जो न्यूनतम उत्तीर्णक से 42 अंक ज्यादा था।

(i) परीक्षा का पूर्णांक = ?

(ii) परीक्षा का न्यूनतम उत्तीर्णक = ?

(iii) % न्यूनतम उत्तीर्णक = ?

A → 20% → 30 से Fail

B → 32% → 42 अंक ज्यादा

$$12\% \rightarrow 42 \text{ अंक}$$

$$1\% = 6 \text{ अंक}$$

$$100\% = 600 \text{ अंक}$$

परीक्षा का पूर्णांक = 600 अंक

(i) परीक्षा का न्यूनतम उत्तीर्णक →

$$A \text{ से } \Rightarrow \frac{600 \times 20}{100} + 30$$

$$= 120 + 30 = 150$$

(ii) % न्यूनतम उत्तीर्णक →

$$= \frac{150}{600} \times 100$$

$$= 25\%$$

(iv) मिश्रित प्रश्न =

Q → किसी परीक्षा में 78% छात्र उत्तीर्ण हुए। यदि परीक्षा में कुल 110 छात्र फेल हुए हों तो परीक्षा में कितने छात्र सम्मिलित हुए?

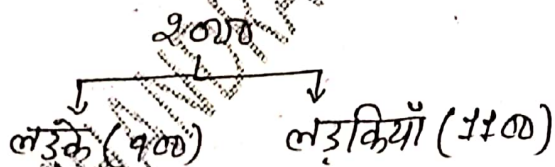
$$\text{कुल Fail \%} = 100 - 78\% \\ = 22\%$$

$$\Rightarrow 22\% = 110$$

$$1\% = \frac{110}{22}$$

$$100\% = 500 \text{ छात्र}$$

Q → किसी परीक्षा में 2000 विद्यार्थी सम्मिलित हुए, जिसमें 900 लड़के व शेष लड़कियाँ हैं। लड़कों के 32% व लड़कियों के 38% परीक्षा में Fail हुए तो परीक्षा में कुल कितने % विद्यार्थी पास हुए?



$$\text{लड़के पास \%} = (100 - 32)\% \\ = 68\%$$

$$\text{लड़कियाँ पास \%} = (100 - 38)\% \\ = 62\%$$

$$\text{लड़के पास} = 900 \times \frac{68}{100} = 612$$

$$\text{लड़कियाँ पास} = 1100 \times \frac{62}{100} = 682$$

$$\text{Total विद्यार्थी पास} = 612 + 682 \\ = 1294$$

$$\% \text{ विद्यार्थी पास} = \frac{1294 \times 100}{2000}$$

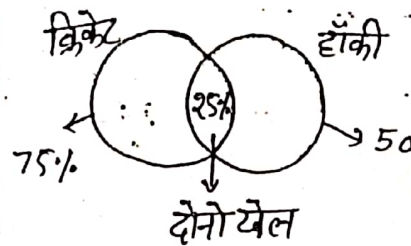
$$= \frac{1294}{20} = 64.7\%$$

$$\% \text{ विद्यार्थी पास} = 64.7\%$$

Venn-Diagram पर प्रश्न =

Case-I - Question based on Positive Statement

Q किसी छात्रावास में कुल 800 छात्र रहते हैं, जिसमें 75% छात्र क्रिकेट और 50% छात्र हॉकी खेलना पसन्द करते हैं, छात्रावास में कुछ छात्र ऐसे भी हैं जो दोनों खेल पसन्द करते हैं तो ऐसे छात्रों की संख्या कितनी है?



दोनों खेल पसन्द छात्र \% =

$$100 - (75 + 50)$$

$$= 100 - (125)$$

$$= 25\% \text{ छात्र दोनों खेल,}$$

$$\Rightarrow 100\% = 800 \text{ छात्र}$$

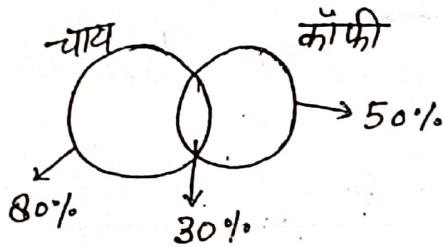
$$\text{तो } 25\% = 800 \times \frac{25}{100}$$

$$= 200 \text{ छात्र दोनों}$$

खेल पसन्द करते हैं।

Q 'किसी समूह में कुछ व्यक्ति हैं, जिसमें 80% व्यक्ति चाय व 50% व्यक्ति कॉफी लेना पसन्द करते हैं। समूह में 480 व्यक्ति ऐसे भी हैं, जो दोनों पेय पसन्द करते हैं तो—

- समूह में कुल व्यक्ति कितने हैं?
- केवल चाय पसन्द करने वाले कितने व्यक्ति हैं?
- केवल कॉफी पसन्द करने वाले कितने व्यक्ति हैं?



दोनों पसन्द करने वाले व्यक्ति % = $100 - (80 + 50)$
 $= 100 - 130$
 $= -30\%$

$30\% = \frac{480}{x} \times 100$

$= 1600$ व्यक्ति

(i) समूह में कुल व्यक्ति = 1600 व्यक्ति

(ii) केवल चाय पसन्द करने वाले व्यक्ति = $1600 \times \frac{80}{100} = 1280$

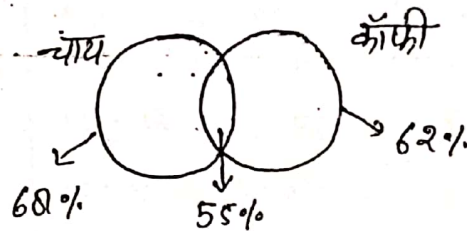
(iii) केवल कॉफी पसन्द करने वाले व्यक्ति = $1600 \times \frac{50}{100} = 800$

Case-II

Question based on Negative Statement =

Q किसी समूह में 68% व्यक्ति चाय और 62% व्यक्ति कॉफी लेना पसन्द करते हैं। समूह में 25% व्यक्ति ऐसे भी हैं, जो न तो चाय और न ही कॉफी पसन्द करते हैं। यदि 1100 व्यक्ति दोनों पेय पसन्द करते हो. तो —

- समूह में कुल कितने व्यक्ति हैं?
- केवल चाय पसन्द करने वाले कितने हैं?
- केवल कॉफी पसन्द करने वाले कितने हैं?
- न तो चाय न ही कॉफी पसन्द करने वाले कितने हैं?



दोनों पसन्द करने वाले व्यक्ति $\Rightarrow [75 - (68 + 62)]\%$
 $= [75 - (130)]\%$
 $= -55\%$

$55\% = 1100$

$1\% = \frac{1100}{55}$

$100\% = \frac{1100}{55} \times 100 = 2000$

(i) समूह में कुल व्यक्ति = 2000

(ii) केवल चाय पसन्द करने वाले = $2000 \times \frac{68}{100} = 1360$

37

= 260

केवल कॉफी पसन्द करने

$$\text{वाले व्यक्ति} = \frac{2000 \times 7}{100}$$

$$= 140 \text{ व्यक्ति}$$

न तो चाय न ही कॉफी पसन्द करने

$$\text{वाले व्यक्ति} = \frac{2000 \times 25}{100}$$

$$= 500 \text{ व्यक्ति}$$

चुनाव पर प्रश्न =

(i) जब मतों की संख्या वैध हो-

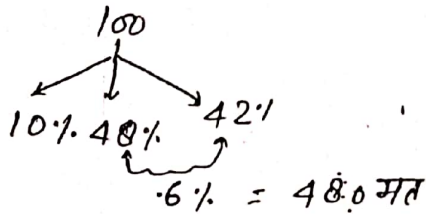
(ii) जब मतों की संख्या अवैध हो-

(iii) जब कुद् मतदाता अपने मतार्थिका का प्रयोग न करे।

(iv) मिश्रित प्रश्न।

(i) जब मतों की संख्या वैध हो =

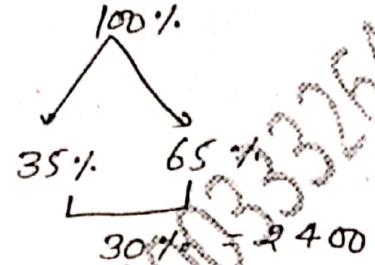
Q जब द्विपक्षीय चुनाव में A को कुल वैध मतों का 10% तथा B को 48% मत मिला। इस चुनाव में B, C के मुकाबले 480 मतों से चुनाव जीत गया तो चुनाव में कुल कितने मत पड़े?



$$1\% = 80 \text{ मत}$$

$$\text{कुल मत} \Rightarrow 100\% = 80 \times 100 = 8000 \text{ मत}$$

Q किसी द्विपक्षीय चुनाव में A को कुल वैध मतों का 35% मत मिला और वह B के मुकाबले 2400 मतों से चुनाव हार गया तो चुनाव में कुल कितने मत पड़े।



$$1\% = \frac{2400}{30}$$

$$100\% = \frac{2400 \times 100}{30}$$

$$= 80 \times 100$$

$$\text{Total मत} = 8000 \text{ मत}$$

(i) जब मतों की संख्या अवैध हो-

Q किसी द्विपक्षीय चुनाव में 10% मत अवैध घोषित कर दिए गए। इस चुनाव में A को कुल वैध मतों का 70% मत मिला और वह B के मुकाबले 7200 मतों से चुनाव जीत गया तो-

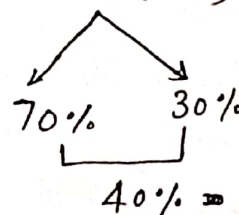
(i) चुनाव में कुल कितने मत पड़े।

(ii) कितने मत वैध पड़े।

100 (मत पड़े)

$\therefore \downarrow 10$ अवैध

90 (वैध)



$$\therefore 80 \times \frac{40}{100} = 7200$$

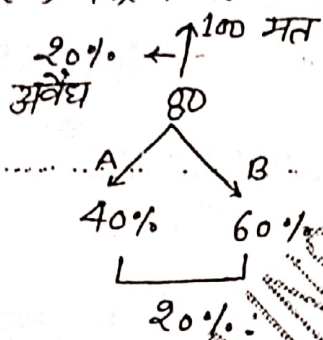
$$(i) \text{ कुल मत} = 200 \times 100 = 20000 \text{ मत}$$

$$(ii) \text{ कितने मत वैध} = 200 \times 90 = 18000 \text{ मत}$$

Q किसी द्विपक्षीय चुनाव में 20% मत अवैध घोषित कर दिए गए। इस चुनाव में A को कुल वैध मतों का 40% मत मिला और वह B के मुकाबले 3600 मतों से चुनाव हार गया तो -

(i) चुनाव में कुल कितने मत पड़े?

(ii) कितने मत वैध पड़े?



$$\Rightarrow 80 \times \frac{20}{100} = 3600$$

$$1\% = \frac{225}{18}$$

$$1\% = 225$$

$$(i) \text{ कुल मत} = 225 \times 100 = 22500$$

$$(ii) \text{ वैध मत} = 225 \times 80 = 18000 \text{ मत}$$

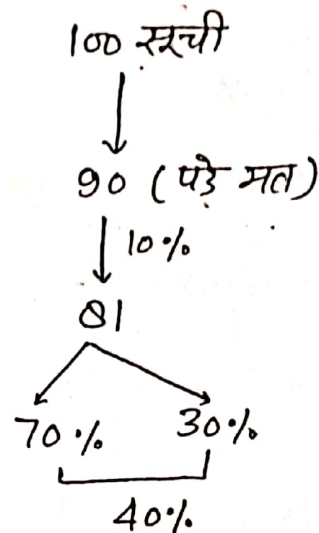
(iii) जब कुल मतदाता अपने मताधिकार का प्रयोग न करेंगे

Q किसी द्विपक्षीय चुनाव में 10% मतदाताओं ने अपने मताधिकार का प्रयोग नहीं किया जबकि कुल पड़े मत के 10% मत अवैध हो गये। इस चुनाव में A को कुल वैध मतों का 70% मत मिला और B के मुकाबले 7290 मतों से चुनाव जीत गया तो -

(i) मतदाता सूची के मत की संख्या -?

(ii) कितने मत पड़े -?

(iii) कितने मत वैध रहे?



$$\Rightarrow 81 \times \frac{20}{100} = 7290$$

$$5 \quad 2045$$

$$1\% = \frac{7290 \times 5}{81 \times 2} = 225$$

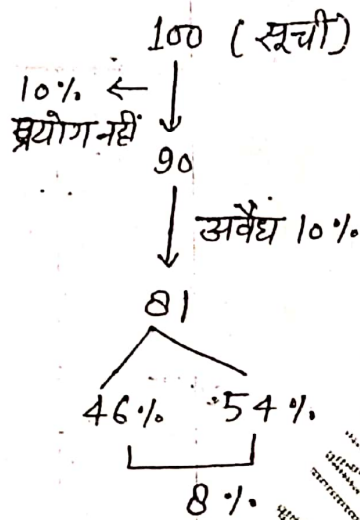
$$(i) \text{ सूची के मत} = 225 \times 100 = 22500$$

$$(ii) \text{ कितने मत} = 225 \times 90 = 20250$$

$$(iii) \text{ मत वैध} = 225 \times 81 = 18225$$

Q किसी द्विपक्षीय चुनाव में 10% मतदाताओं ने अपने मताधिकार का प्रयोग नहीं किया जबकि कुल पड़े मत के 10% मत अवैध हो गये। इस चुनाव में A को कुल वैध मतों का 46% मत मिला और वह B के मुकाबले 1620 मतों से चुनाव हार गया तो -

- (i) मतदाता सूची में मत की संख्या = ?
 (ii) कितने मत पड़े ?
 (iii) कितने मत वैध रहे ?



$$\Rightarrow 81 \times \frac{8}{100} = 6.48$$

$$\Rightarrow 4\% = \frac{1620 \times 100}{81 \times 8}$$

$$= \frac{20000}{8} \Rightarrow 2500$$

$$1\% = 250$$

(i) सूची में मत की संख्या = $250 \times 100 = 25000$ मत

(ii) कुल मत = $250 \times 90 = 22500$ मत

(iii) वैध मत = $250 \times 81 = 20250$ मत

मिश्रित प्रश्न =

Q किसी द्विपक्षीय चुनाव में 8% मतदाताओं ने अपने मताधिकार का प्रयोग नहीं किया। जीतने वाला उम्मीदवार सूची के मत का 47% मत प्राप्त किया, तथा वह 11000 मतों से चुनाव जीत गया -

(i) सूची के मत = ?

(ii) पड़े मत की संख्या = ?

(iii) दोनो उम्मीदवार को मिले मत = ?

माना सूची के मत = 100

पड़े मत = 92

जीतने वाला = 47%

हारने वाला = $(92 - 47) = 45$

$\therefore (47 - 45)\% = 11000$

2% = 11000

1% = 5500

(i) सूची के मत = $550 \times 100 = 55000$

(ii) पड़े मत = $550 \times 92 = 50600$

(iii) A को मिला मत = $550 \times 47 = 25850$

B को मिला मत = $550 \times 45 = 24750$

आय और व्यय पर प्रश्न-

(i) जब प्रश्न में शेष का जिक्र हो-

(ii) जब प्रश्न में 'शेष का' जिक्र न हो-

(iii) मिश्रित प्रश्न

(i) जब प्रश्न में शेष का जिक्र हो-

Q एक व्यक्ति अपनी कुल आय का 40% शिक्षा पर और शेष का 70% अन्य जरूरतों पर खर्च करता है। यदि महीने के अंत में उसकी बचत 36000 ₹ हो तो उसकी मासिक आय क्या होगी?

$$36000 = x \times \frac{60}{100} \times \frac{30}{100}$$

$$\frac{3600000}{18} = x$$

$$x = 200000 \text{ ₹}$$

Q एक व्यक्ति अपनी कुल आय का 30% शिक्षा पर, शेष का 50% मनोरंजन पर तथा शेष में से 25000 ₹ अन्य जरूरतों पर खर्च करता है। यदि महीने के अंत में वह 31000 ₹ बचा लेता है, तो उसकी कुल मासिक आय कितनी है?

$$31000 = x \times \frac{70}{100} \times \frac{50}{100} - 25000$$

$$(31000 + 25000) \times 100 = 35x$$

$$\frac{56000 \times 100}{35} = x$$

$$x = 160000 \text{ ₹}$$

(ii) जब प्रश्न में शेष का जिक्र न हो-

Q एक व्यक्ति अपनी कुल आय का 20% शिक्षा पर, 15% मनोरंजन पर तथा 30% अन्य मदों पर खर्च करता है। यदि महीने के अंत में वह 42000 ₹ बचत कर लेता हो तो उसकी कुल मासिक आय कितनी है?

$$\text{कुल खर्च} = (20 + 15 + 30) = 65\%$$

$$\text{बचत} = 35\%$$

$$\therefore \text{बचत} = \frac{35}{100}$$

$$\frac{42000}{35} = \frac{x \times 65}{100}$$

$$\frac{42000 \times 100}{65} = x$$

$$x = 120000 \text{ ₹}$$

(iii) मिश्रित प्रश्न-

Q A व B में प्रत्येक के आय समान हैं। A अपनी आय का 35% तथा B, 22% बचत करता है। यदि B की मासिक बचत 3080 ₹ हो तो A की बचत क्या होगा?

$$B \text{ की बचत} = 3080 \text{ ₹}$$

$$22\% = 3080 \text{ ₹}$$

$$\therefore 1\% = \frac{3080}{22} = 140 \text{ ₹}$$

$$100\% = 14000 \text{ ₹ (A व B प्रत्येक का)}$$

$$\therefore A \text{ की बचत} = \frac{14000 \times 35}{100}$$

$$= 4900 \text{ ₹}$$

39

Q A व B के आय का योग 33000 ₹ है। A अपनी आय का 60% तथा B अपनी आय का 75% खर्च करता है यदि दोनों की बचत में अनुपात 4:3 हो तो A की आय बताइए?

$$\frac{A \text{ की बचत}}{B \text{ की बचत}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{A \times 40\%}{B \times 25\%} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{4 \times 25}{3 \times 40} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{5}{6}$$

33000

A B

5 : 6

अनुपाती योग = 11

$$A = \frac{5}{11} \times 33000$$

$$= 15000 \text{ ₹}$$

* जनसंख्या पर प्रश्न =

- (i) जब बाद की जनसंख्या ज्ञात करनी हो -
- (ii) जब पूर्व की जनसंख्या ज्ञात करनी हो -
- (iii) जब व्यक्तियों की अलग-अलग संख्या ज्ञात करनी हो -

(i) जब बाद की जनसंख्या ज्ञात करनी हो -

Note - (i) यदि किसी नगर की वर्तमान जनसंख्या 'P' तथा जनसंख्या में प्रतिवर्ष $x\%$ की दर से वृद्धि/कमी हो तो t वर्ष बाद नगर की जनसंख्या (A)

$$A = P \left(1 \pm \frac{x}{100} \right)^t$$

(ii) यदि समय भिन्नात्मक ($t = a \frac{b}{c}$) वर्ष

$$A = P \left(1 \pm \frac{x}{100} \right)^a \times \left(1 \pm \frac{x \times b/c}{100} \right)$$

(iii) यदि जनसंख्या में पहले वर्ष $x_1\%$ कमी, दूसरे वर्ष $x_2\%$ वृद्धि तथा तीसरे वर्ष $x_3\%$ कमी हो तो इस 3 वर्ष बाद जनसंख्या -

$$A = P \left(1 - \frac{x_1}{100} \right) \left(1 + \frac{x_2}{100} \right) \left(1 - \frac{x_3}{100} \right)$$

Q किसी नगर की वर्तमान जनसंख्या 40000 है, जनसंख्या में प्रतिवर्ष 10% की दर से वृद्धि होती है, तो 3 वर्ष के अन्त में नगर की जनसंख्या क्या होगी?

$$A = P \left(1 + \frac{x}{100} \right)^t$$

$$= 40000 \left(1 + \frac{10}{100} \right)^3$$

$$= 40000 \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10}$$

$$= 40 \times 1331$$

$$= 53240$$

Q किसी नगर की वर्तमान जनसंख्या 80000 है, जनसंख्या में प्रतिवर्ष 5% की दर कमी होती है, तो $2\frac{1}{2}$ वर्ष के अन्त में नगर की जनसंख्या क्या होगी?

Solⁿ

$$A = 80000 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^2 \times \left(1 - \frac{5 \times 1}{2}\right)$$

$$= 80000 \left(\frac{19}{20}\right)^2 \times \frac{99}{100}$$

$$= 80000 \times \frac{19}{20} \times \frac{19}{20} \times \frac{99}{100}$$

$$= 361 \times 198$$

$$= 71478 \text{ जनसंख्या}$$

Q किसी नगर की वर्तमान जनसंख्या 120000 है। जनसंख्या में पहले व दूसरे वर्ष क्रमशः 10% व 20% की वृद्धि तथा तीसरे वर्ष 25% की कमी होती है, तो इस 3 वर्ष के अन्त में नगर की जनसंख्या कितनी होगी?

$$A = 120000 \left(1 + \frac{10}{100}\right) \left(1 + \frac{20}{100}\right) \left(1 - \frac{25}{100}\right)$$

$$= 120000 \times \frac{11}{10} \times \frac{6}{5} \times \frac{3}{4}$$

$$= 600 \times 66 \times 3$$

$$= 118800 \text{ जनसंख्या}$$

(ii) जब पूर्व की जनसंख्या ज्ञात करनी हो =

Note = पूर्व की जनसंख्या ज्ञात करने के लिए वर्तमान जनसंख्या को 'A' से तथा ज्ञात की जाने वाली जनसंख्या को P से प्रदर्शित करते हैं।

Q किसी नगर की जनसंख्या प्रतिवर्ष 5% की दर से घटी। यदि वर्तमान में नगर की जनसंख्या 36100 हो तो 2 वर्ष पूर्व नगर की जनसंख्या क्या होगी?

$$A = P \left(1 - \frac{r}{100}\right)^t$$

$$36100 = P \left(1 - \frac{5}{100}\right)^2$$

$$36100 = P \left(\frac{19}{20}\right)^2$$

$$\frac{100}{36100 \times 20 \times 20} = P$$

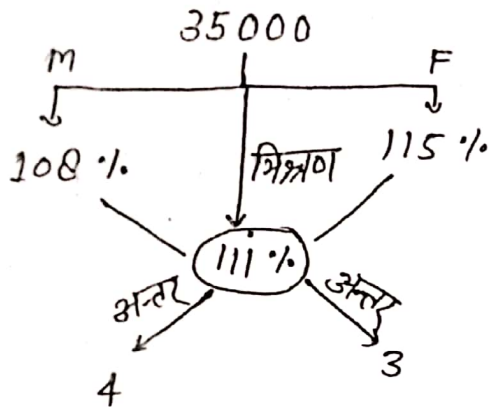
$$100 \times 400 = P$$

$$P = 40000 \text{ जनसंख्या}$$

(iii) जब व्यक्तियों की अलग-2 जनसंख्या ज्ञात करनी हो =

Q वर्ष के प्रारम्भ में एक नगर की जनसंख्या 35000 थी। पुरुषों की संख्या में 8% तथा स्त्रियों की जनसंख्या में 15% की वृद्धि हुई। इस प्रकार वर्ष के अन्त में दोनों की संख्या मिलाकर 11% बढ़ी, तो वर्ष के प्रारम्भ में कितने पुरुष थे?

Alligation Rule से =
(मिश्रण नियम से)



$$M:F = 4:3$$

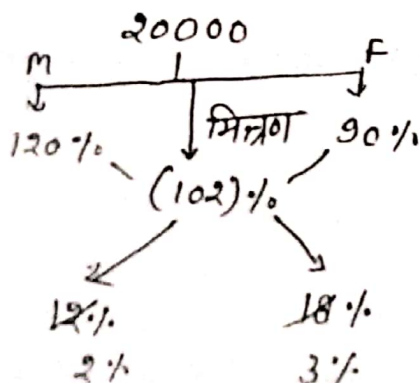
अनुपाती योग = 7

$$\text{पुरुष} = \frac{4}{7} \times 35000$$

$$= 20000 \text{ पुरुष}$$

Q वर्ष के प्रारम्भ में एक नगर की जनसंख्या 20000 थी। पुरुषों की संख्या में 20% की वृद्धि तथा स्त्रियों की संख्या में 10% की कमी हुई। इस प्रकार वर्ष के अंत में दोनों की संख्या मिलाकर 2% बढ़ी तो वर्ष के प्रारम्भ में कितने पुरुष थे?

Alligation Rule से -



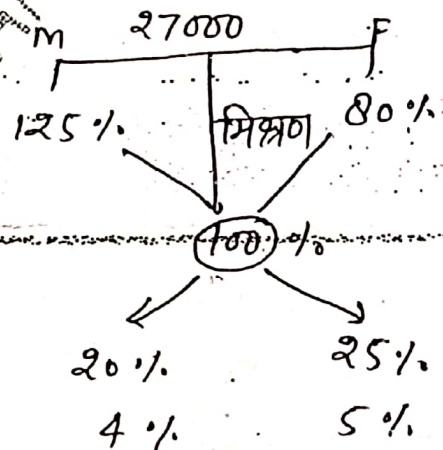
$$M:F = 2:3$$

अनुपाती योग = 5

$$M = \frac{2}{5} \times 40000$$

$$= 16000 \text{ सं०}$$

Q वर्ष के प्रारम्भ में एक नगर की जनसंख्या 27000 थी। पुरुषों की संख्या में 25% की वृद्धि तथा स्त्रियों की संख्या में 20% की कमी हुई। इस प्रकार वर्ष के अंत में दोनों की संख्या मिलाकर 5% बढ़ी तो वर्ष के प्रारम्भ में स्त्रियों की संख्या कितनी होगी?



$$M:F = 4:5$$

अनुपाती योग = 9

$$F = \frac{5}{9} \times 27000$$

$$= 15000 \text{ जनसंख्या}$$

* जब वस्तु के मूल्य में % वृद्धि / कमी हो जाने से वस्तु की मात्रा कम या अधिक मिले —

$$\text{पुराना भाव} = \frac{\text{कीमत} \times \% \text{ वृद्धि/कमी}}{\text{आधिक/कम मात्रा (100 \pm \%)}}$$

$$\text{नया भाव} = \frac{\text{कीमत} \times \% \text{ वृद्धि/कमी}}{\text{आधिक/कम मात्रा} \times 100}$$

Q आम के मूल्य में 25% की वृद्धि हो जाने से 120 ₹ रुपये में पहले की अपेक्षा 6 आम कम मिलते हैं,

तो - (i) आम का पुराना भाव = ?

(ii) आम का नया भाव = ?

$$\text{पुराना भाव} = \frac{120 \times 25}{6 \times 125} = 4 \text{ ₹/आम}$$

$$\text{नया भाव} = \frac{120 \times 25}{6 \times 100} = 5 \text{ ₹/आम}$$

दूसरी विधि =

$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 6} 6 \text{ आम कम मिलने के बाद अब.} \xrightarrow{\times 6} 24 \text{ आम मिलते हैं।}$$

$$1. \text{ अब का नया भाव} = \frac{120}{24} = 5 \text{ ₹/आम}$$

$$2. \text{ पुराना भाव} = \frac{120}{30} = 4 \text{ ₹/आम}$$

Q चावल के मूल्य में 25% कमी हो जाने से एक ग्राहक 480 ₹ में पहले की अपेक्षा 10 Kg चावल अधिक प्राप्त करता है। तो -

(i) पुराना भाव = ?

(ii) नया भाव = ?

$$\text{पुराना भाव} = \frac{\text{कीमत} \times \% \text{ वृद्धि/कमी}}{\text{आधिक/कम मात्रा} \times 100} = \frac{480 \times 25}{10 \times 75} = 16 \text{ ₹/Kg}$$

$$\text{नया भाव} = \frac{480 \times 25}{10 \times 100} = 12 \text{ ₹/Kg}$$

दूसरी विधि =

$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 10} 10 \text{ Kg अधिक मिलने के बाद अब 40 Kg चावल मिलते हैं।}$$

$$1. \text{ अब नया भाव} = \frac{480}{40} = 12 \text{ ₹/Kg}$$

$$2. \text{ पुराना भाव} = \frac{480}{30} = 16 \text{ ₹/Kg}$$

Profit & Loss

लाभ & हानि

1. साधारण प्रश्न =

$$\% \text{ लाभ/हानि} = \frac{\text{लाभ/हानि} \times 100}{\text{क्रयमूल्य}}$$

$$100\% = \frac{\text{विक्रयमूल्य} \times 100}{(100 \pm \text{लाभ/हानि}\%)}$$

Q एक दुकानदार 1 दर्जन पेन्सिल 2 ₹ प्रति पेन्सिल की दर से खरीदा है। वह 4 Pencil को 1.5 ₹/पेन्सिल तथा शेष को 2.5 ₹/पेन्सिल की दर से बेचता है तो उसका लाभ/हानि % ज्ञात कीजिए।

12 Pencil का C.P. = $2 \times 12 = 24$ ₹

$$\begin{cases} 4 \text{ पेन्सिल का S.P.} = 1.5 \times 4 = 6 \text{ ₹} \\ 8 \text{ पेन्सिल का S.P.} = 2.5 \times 8 = 20 \text{ ₹} \end{cases}$$

$\therefore 12 \text{ पेन्सिल का S.P.} = 26 \text{ ₹}$

लाभ = $26 - 24 = 2 \text{ ₹}$

$$\% \text{ लाभ} = \frac{2 \times 100}{24} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}\%$$

Q एक दुकानदार 30% लाभ पर किसी वस्तु को 7800 ₹ में बेचता है

(i) वस्तु का क्रयमूल्य = ?

(ii) 5% हानि पर विक्रयमूल्य = ?

(i) C.P. = $\frac{7800 \times 100}{130} = 6000 \text{ ₹}$

(ii) 5% हानि पर विक्रयमूल्य =

$$= 6000 \times \frac{95}{100} = 5700 \text{ ₹}$$

दूसरी विधि =

130% $\xrightarrow{\text{S.P.}}$ 7800 ₹

1% $\rightarrow \frac{7800}{130} = 60 \text{ ₹}$

100% $\rightarrow 60 \times 100 = 6000 \text{ ₹}$

95% $\rightarrow 6000 \times \frac{95}{100} = 5700 \text{ ₹}$

Q एक दुकानदार 15% हानि पर किसी वस्तु को 5100 ₹ में बेचता है तो

(i) वस्तु का क्रयमूल्य = ?

(ii) 10% लाभ पर वस्तु का विक्रयमूल्य = ?

85% $\rightarrow 5100 \text{ ₹}$

1% $\rightarrow \frac{5100}{85} \times 60 = 60 \text{ ₹}$

100% $\rightarrow 6000 \text{ ₹}$

110% $\rightarrow \frac{6000 \times 110}{100}$

= 6600 ₹

(i) क्रयमूल्य = 6000 ₹

(ii) 10% लाभ पर वस्तु का विक्रयमूल्य = 6600 ₹

Q एक दुकानदार 6 दर्जन अण्डे 1 ₹ में 3 की दर से खरीदता है। इससे से 6 अण्डे टूट जाते हैं, तो शेष अण्डों को किस दर से बेचे कि पूरे सौदे में 10% लाभ हो?

$$72 \text{ अण्डे का C.P} = \frac{1}{3} \times 72$$

$$= 24 ₹$$

$$10\% \text{ लाभ पर SP} = 24 \times \frac{110}{100}$$

$$= 2.4 \times 11$$

$$= 26.4 ₹$$

$$\therefore \text{प्रति अण्डा विक्रय} = \frac{26.4}{66}$$

$$= 0.4 ₹$$

या 40 पैसे

* अनुपात या गुना पर प्रश्न :-

Imp

Q किसी वस्तु के क्रयमूल्य और विक्रय मूल्य में अनुपात 5:7 है तो वस्तु पर लाभ/हानि % बताइए?

$$C.P : S.P = 5 : 7$$

$$\text{लाभ} = (7 - 5)$$

$$\text{लाभ} = 2$$

$$\% \text{ लाभ} = \frac{2 \times 100}{5}$$

$$= 40\%$$

Q किसी वस्तु को बेचने पर उस वस्तु पर हुआ लाभ, विक्रयमूल्य के $\frac{3}{7}$ के बराबर है तो लाभ % बताइए?

$$\text{लाभ} = \text{विक्रय} \times \frac{3}{7}$$

$$\frac{\text{लाभ}}{\text{विक्रय}} = \frac{3}{7}$$

$$\therefore \text{क्रयमूल्य} = 7 - 3 = 4$$

$$\% \text{ लाभ} = \frac{3 \times 100}{4}$$

$$= 75\%$$

Q किसी वस्तु को बेचने पर उस वस्तु पर हुआ हानि, विक्रयमूल्य के $\frac{1}{4}$ गुने के बराबर है तो हानि % बताइए?

$$\text{हानि} = \text{विक्रयमूल्य} \times \frac{1}{4}$$

$$\frac{\text{हानि}}{\text{विक्रयमूल्य}} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{क्रयमूल्य} = 4 + 1 = 5$$

$$\% \text{ हानि} = \frac{1 \times 100}{5} = 20\%$$

* जब कुछ वस्तुओं का क्रयमूल्य, अन्य वस्तुओं के विक्रयमूल्य के बराबर हो

Q 60 पुस्तकों का क्रयमूल्य, 75 पुस्तकों के विक्रयमूल्य के बराबर है, तो लाभ / हानि % बताइये?

$$60 \text{ का C.P} = 75 \text{ का S.P}$$

$$\frac{C.P}{S.P} = \frac{75}{60}$$

$$\frac{C.P}{S.P} = \frac{5}{4}$$

$$\text{हानि} = (5 - 4) = 1$$

$$\% \text{ हानि} = \frac{1 \times 100}{5} = 20\%$$

Q 72 वस्तुओं का क्रयमूल्य उतना ही है,

जितना 60 वस्तुओं का विक्रयमूल्य है, तो लाभ / हानि % बताइये?

$$72 \text{ का C.P} = 60 \text{ का S.P}$$

$$\frac{C.P}{S.P} = \frac{60}{72}$$

$$\frac{C.P}{S.P} = \frac{5}{6}$$

$$\text{लाभ} = (6 - 5) = 1$$

$$\text{लाभ \%} = \frac{1 \times 100}{5} = 20\%$$

* जब a रु में b वस्तु खरीदकर c रु में d वस्तु बेच दी जाए =

Q एक फल विक्रेता 5 रु में 6 की दर से सन्तरे खरीदकर 3 रु में 4 की दर से बेच देता है तो लाभ / हानि % बताइये

1 सन्तरे का C.P : 1 सन्तरे का विक्रय

$$= \frac{5}{6} : \frac{3}{4}$$

$$= \frac{5}{6} \times 12 : \frac{3}{4} \times 12$$

$$C.P : S.P = 10 : 9$$

$$\frac{C.P}{S.P} = \frac{10}{9}$$

$$\text{हानि} = (10 - 9) = 1$$

$$\% \text{ हानि} = \frac{1 \times 100}{10} = 10\%$$

दूसरी विधि-

	रु	सन्तरे
क्रय -	5	6
विक्रय -	3	4

$$\therefore \text{क्रय} = 20, \text{विक्रय} = 18$$

$$\text{हानि} = (20 - 18) = 2$$

$$\% \text{ हानि} = \frac{2 \times 100}{20} = 10\%$$

एक दुकानदार 10 रु में 11 की दर से कुछ वस्तु खरीदकर 11 रु में 10 की दर से उतने ही वस्तु बेच देता है तो लाभ/हानि % बताइए।

रु दर
क्रय - 10 $\swarrow \searrow$ 11
विक्रय - 11 $\swarrow \searrow$ 10

$$\text{क्रयमूल्य} = 100, \text{विक्रयमूल्य} = 121$$

$$\text{लाभ} = (121 - 100) = 21$$

$$\% \text{ लाभ} = \frac{21 \times 100}{100} = 21\%$$

दूसरी विधि-

$$CP : SP = \frac{10}{11} : \frac{11}{10}$$

$$CP : SP = \frac{10}{11} \times \frac{10}{10} : \frac{11}{10} \times \frac{11}{11}$$

$$CP : SP = 100 : 121$$

$$\frac{CP}{SP} = \frac{100}{121}$$

$$\Rightarrow \text{लाभ} = (121 - 100) = 21$$

$$\% \text{ लाभ} = \frac{21 \times 100}{100} = 21\%$$

* जब कोई वस्तु दो बार बेची जाए-

एक दुकानदार 15 % हानि पर किसी वस्तु को 2550 रु में बेचता है तो 10 % लाभ प्राप्त करने के लिए उसे वस्तु कितने रु में बेचना होगा?

$$\text{वस्तु का क्रयमूल्य} = \frac{2550 \times 100}{85} = 3000 \text{ रु}$$

$$\therefore 10\% \text{ लाभ पर विक्रयमूल्य} = \frac{3000 \times 110}{100} = 3300 \text{ रु}$$

दूसरी विधि-

$$85\% = 2550$$

$$1\% = \frac{2550}{85}$$

$$100\% = \frac{2550 \times 100}{85}$$

$$\text{क्रयमूल्य} = 3000 \text{ रु}$$

$$\therefore 10\% \text{ लाभ पर विक्रयमूल्य} =$$

$$\frac{3000 \times 110}{100} = 3300 \text{ रु}$$

एक दुकानदार 20 % लाभ पर किसी वस्तु को 4800 रु में बेचता है, तो वह वस्तु पहले से कितने रु कम में बेचता है कि उसे 10 % हानि होना ?

$$120\% = 4800$$

$$1\% = \frac{4800}{120}$$

$$100\% = \frac{4800 \times 100}{120} = 4000 \text{ रु}$$

$$\therefore 10\% \text{ हानि पर SP} = \frac{4000 \times 90}{100} = 3600 \text{ रु}$$

पहले से 1200 रु बेचता तो 10% हानि होता

Q एक दुकानदार किसी वस्तु को 30% लाभ पर बेचता है यदि वह वस्तु पर केवल 5% लाभ लेता तो पहले से उसे 1275 ₹ कम मिलते तो वस्तु का क्रयमूल्य बताइये?

$$\begin{array}{l} \text{समान (अन्तर)} \left\{ \begin{array}{l} 30\% (+) \longrightarrow \boxed{} \\ 5\% (+) \longrightarrow \boxed{} \end{array} \right. \text{विक्रय} \\ \hline 25\% \end{array} \quad \text{कम} = 1275 \text{ ₹}$$

$$25\% = 1275$$

$$1\% = \frac{1275}{25} = 51$$

$$1\% = 51$$

$$100\% = 5100 \text{ ₹}$$

$$\text{क्रयमूल्य} = 5100 \text{ ₹}$$

Q एक दुकानदार किसी वस्तु को 5% हानि पर बेचता है यदि वह वस्तु को 10% लाभ पर बेचता तो पहले से उसे 360 ₹ अधिक मिलते तो वस्तु का क्रयमूल्य बताइये?

$$\begin{array}{l} \text{विपरीत (लोड)} \left\{ \begin{array}{l} 5\% \text{ हानि} \longrightarrow \boxed{} \\ 10\% \text{ लाभ} \longrightarrow \boxed{} \end{array} \right. \text{विक्रय} \\ \hline 15\% \end{array} \quad \begin{array}{l} 360 \text{ ₹} \\ \text{ब्यादा} \end{array}$$

$$\Rightarrow 15\% = 360$$

$$1\% = \frac{360}{15} = 24$$

$$1\% = 24$$

$$100\% = 2400 \text{ ₹}$$

* जब दो वस्तुओं को समान मूल्य पर बेचा जाय - Case-1

Note- जब दो वस्तुओं को समान मूल्य पर बेचा जाय और पहली वस्तु पर $x\%$ का लाभ तथा दूसरी वस्तु पर $x\%$ का हानि हो तो ऐसे सौदे में सदैव हानि ही होगा है और यह -

$$(i) \text{ हानि } \% = \frac{x^2}{2}$$

$$(ii) \text{ कुल हानि दोनो वस्तुओं का विक्रय } = \left(\frac{100}{x} \right)^2 - 1$$

के बराबर होता है।

Q एक दुकानदार दो वस्तुओं में प्रत्येक वस्तु को 2400 ₹ में बेचता है।

पहली वस्तु पर उसे 20% लाभ तथा दूसरी वस्तु पर 20% हानि होता है तो -

(i) इस सौदे में उसे कितने % लाभ/हानि होगा।

(ii) उसे कितने ₹ का लाभ/हानि होगा?

$$(i) \% \text{ हानि} = \frac{x^2}{100} = \frac{(20)^2}{100} = \frac{400}{100} = 4\%$$

$$(ii) \text{ हानि} = \frac{4800}{\left(\frac{100}{20} \right)^2 - 1}$$

$$\therefore = \frac{4800}{52-1} = \frac{4800}{51} = 94.11 \text{ ₹ हानि}$$

दूसरी विधि - Imp

$$I \text{ वस्तु का C.P} = \frac{S.P \times 100}{(100 \pm \text{हानि/लाभ})}$$

$$= \frac{2400 \times 100}{100 + 20}$$

$$= \frac{2400 \times 100}{120} = 2000 \text{ ₹}$$

$$II \text{ वस्तु का C.P} = \frac{30}{80} \times \frac{2400 \times 100}{100} = 3000 \text{ ₹}$$

$$(I + II) \text{ का C.P} = 2000 + 3000 = 5000 \text{ ₹}$$

$$(I + II) \text{ का S.P} = 2400 + 2400 = 4800 \text{ ₹}$$

$$\text{हानि} = (5000 - 4800)$$

$$= 200 \text{ ₹}$$

$$\therefore \text{हानि} = \frac{200 \times 100}{5000} = 4\% \text{ हानि}$$

Q. एक दुकानदार दो वस्तुओं को क्रमशः 2550 ₹ तथा 3600 ₹ में बेचता है। पहले वस्तु पर उसे 15% हानि तथा दूसरी वस्तु पर 20% लाभ होता है तो—

(i) इस सौदे में उसे कितने % लाभ/हानि होगा?

(ii) उसे कितने रु का लाभ/हानि होगा?

$$I \text{ वस्तु का C.P} = \frac{2550 \times 100}{(100 - 15)} = \frac{2550 \times 100}{85} = 3000 \text{ ₹}$$

$$II \text{ वस्तु का C.P} = \frac{30}{120} \times \frac{2550 \times 100}{100} = 3000 \text{ ₹}$$

$$(I + II) \text{ वस्तु का C.P} = (3000 + 3000) = 6000 \text{ ₹}$$

$$(I + II) \text{ वस्तु का S.P} = (2550 + 3600) = 6150 \text{ ₹}$$

$$\text{लाभ} = (6150 - 6000) = 150 \text{ ₹}$$

$$\therefore \text{लाभ} = \frac{150 \times 100}{6000}$$

$$= 2.5\% \text{ लाभ}$$

* जब दो वस्तुओं को समान मूल्य पर बेचा जाय - Case-II

Q. एक दुकानदार दो वस्तुओं में प्रत्येक वस्तु को समान मूल्य पर बेचता है। पहली वस्तु पर उसे 20% लाभ तथा दूसरी वस्तु पर 25% लाभ होता है। यदि पहली वस्तु का क्रयमूल्य 10,000 ₹ हो तो दूसरी वस्तु का क्रयमूल्य ज्ञात कीजिए?

I का विक्रय = II का विक्रय

$$10000 \times \frac{120}{100} = x \times \frac{125}{100}$$

$$x = \frac{10000 \times 120}{125}$$

$$= 120 \times 80 = 9600 \text{ ₹}$$

दूसरी विधि -

I का क्रयमूल्य : II का क्रयमूल्य

$$\begin{array}{r} 125 \\ \downarrow \\ 10000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 120 \\ \downarrow \times 80 \\ 9600 \end{array}$$

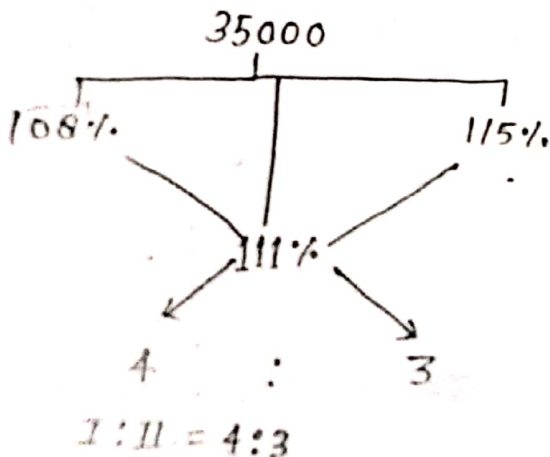
$$125 = 10000$$

$$1 = \frac{10000 \times 80}{125}$$

$$1 = 80$$

मिश्रण नियम पर प्रश्न - (क्रयमूल्य = ?)

Q एक दुकानदार 35000 ₹ में दो वस्तु खरीदता है। पहले वस्तु पर उसे 8% का लाभ जबकि दूसरे वस्तु पर 15% लाभ होता है। इस प्रकार दोनों वस्तुओं पर मिलाकर उसे 11% का लाभ हुआ, तो पहली वस्तु का क्रयमूल्य बताइये।

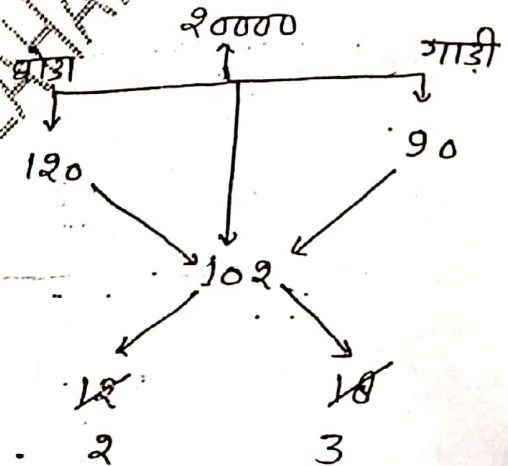


अनुपाती योग = 7

I वस्तु का क्रयमूल्य =

$$\frac{4}{7} \times 35000 = 20000 \text{ ₹}$$

Q एक व्यक्ति ने एक घोड़ा और एक गाड़ी 20000 ₹ में खरीदा। उसे घोड़े को 20% लाभ पर तथा गाड़ी को 10% हानि पर बेचा। इस प्रकार पूरे सौदे में उसे 2% लाभ हुआ तो गाड़ी का क्रयमूल्य बताइये?

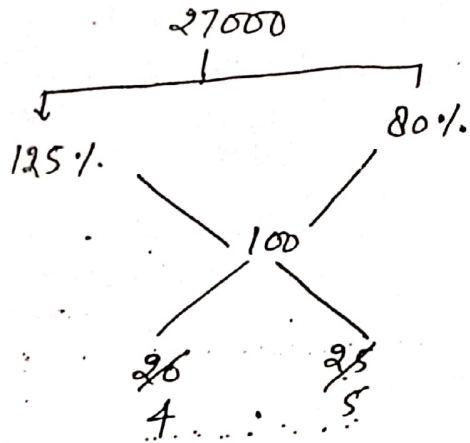


घोड़ा : गाड़ी = 2 : 3

अनुपाती योग = 5

$$\text{गाड़ी का क्रयमूल्य} = \frac{3}{5} \times 20000 = 12000 \text{ ₹}$$

Q एक व्यक्ति ने 27000 में दो वस्तुओं को खरीदा। पहले वस्तु पर उसे 25% लाभ तथा दूसरे वस्तु पर 20% हानि होता है। इस प्रकार दोनों वस्तुओं को मिलाकर उसे न लाभ हुआ न हानि तो हानि पर बेची गई वस्तु का क्रयमूल्य बताइए?



अनुपाती योग = 9

हानि पर बेची गयी वस्तु का

$$\text{क्रयमूल्य} = \frac{5}{9} \times 27000$$

$$= 15000 \text{ ₹}$$

* जब वस्तु को बेचने से उस पर हुआ लाभ हानि के बराबर या हानि के न गुने के बराबर हो =

Q किसी वस्तु को 9000 ₹ में बेचने से उस वस्तु पर हुआ लाभ उसी वस्तु को 6000 ₹ में बेचने से हुये हानि के बराबर था तो वस्तु का क्रयमूल्य बताइए?

$$\text{माना वस्तु का क्रयमूल्य} = x$$

$$\text{लाभ} = \text{हानि}$$

$$(9000 - x) = (x - 6000)$$

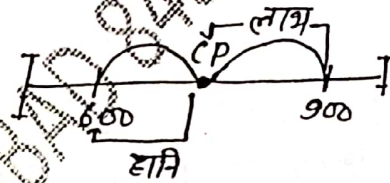
$$9000 + 6000 = x + x$$

$$15000 = 2x$$

$$x = 7500 \text{ ₹}$$

$$\text{वस्तु का क्रयमूल्य} = 7500 \text{ ₹}$$

दूसरी विधि =



$$CP = \frac{6000 + 9000}{2} = \frac{15000}{2} = 7500 \text{ ₹}$$

Q किसी वस्तु को 840 ₹ में बेचने से उस वस्तु पर हुआ लाभ उसी वस्तु को 600 ₹ में बेचने से हुये हानि के 3 गुने के बराबर था तो वस्तु का क्रयमूल्य बताइए।

$$\text{माना क्रयमूल्य} = x$$

$$\text{लाभ} = \text{हानि} \times 3$$

$$(840 - x) = (x - 600) \times 3$$

$$840 - x = 3x - 1800$$

$$840 + 1800 = 3x + x$$

$$2640 = 4x$$

$$x = \frac{2640}{4} = 660$$

$$x = 660 \text{ ₹}$$

दूसरी विधि =

$$\begin{array}{rcl} \text{विक्रय} & & \text{क्रयमूल्य} \\ 840 & \xrightarrow{P} & \boxed{3} \rightarrow \boxed{660} \\ 600 & \xrightarrow{L} & \boxed{1} \rightarrow \boxed{660} \\ \hline 240 & & 4 \end{array}$$

$$1 = 60$$

$$CP = 840 - 180 = 660 \text{ ₹}$$

Q किसी वस्तु को 1000 ₹ में बेचने से उस वस्तु पर हुआ लाभ उसी वस्तु को 750 ₹ में बेचने से हुए हानि के 4 गुने के बराबर था तो वस्तु का क्रयमूल्य बताइए।

$$\text{माना क्रयमूल्य} = x$$

$$\text{लाभ} = \text{हानि} \times 4$$

$$(1000 - x) = (x - 750) \times 4$$

$$1000 - x = 4x - 3000$$

$$1000 + 3000 = 4x + x$$

$$4000 = 5x$$

$$x = 800$$

$$\text{क्रयमूल्य} = 800 \text{ ₹}$$

* जब % लाभ / हानि, क्रयमूल्य के बराबर हो -

$$\boxed{\text{क्रयमूल्य} = 10\sqrt{25 + \text{विक्रय}} - 50}$$

Q किसी वस्तु को 24 ₹ में बेचने से एक दुकानदार को ठीक उतने ही % का लाभ होता है, जितना वस्तु का क्रयमूल्य था। तो वस्तु का क्रयमूल्य बताइए

- (a) 30 ₹ (b) 16 ₹
(c) 20 ₹ (d) 22 ₹

$$\begin{aligned} \text{क्रयमूल्य} &= 10\sqrt{25 + 24} - 50 \\ &= 10\sqrt{49} - 50 \\ &= 10 \times 7 - 50 \\ &= 70 - 50 = 20 \text{ ₹} \end{aligned}$$

Option - c से -

$$\begin{aligned} SP &= 20 \times \frac{120}{100} \\ &= 24 \text{ ₹} \end{aligned}$$

दूसरी विधि से =

$$\begin{aligned} 24 - \begin{cases} 12 \times 10 = 120 \text{ ₹ (Neg)} \\ 10 \times x \\ 2 \times 10 = 20 \text{ ₹ (Posit)} \end{cases} & \therefore 20 \text{ ₹ Ans} \\ & \text{होगा।} \end{aligned}$$

Q किसी वस्तु को 144 ₹ में बेचने से एक दुकानदार को ठीक उतने ही % का लाभ होता है, जितना वस्तु का क्रयमूल्य था। तो वस्तु का क्रयमूल्य = ?

$$\begin{aligned} 144 - \begin{cases} 18 \times 10 = 180 \\ 10 \times x \\ 8 \times 10 = 80 \text{ (Positive)} \end{cases} & \therefore 80 \text{ Ans} \end{aligned}$$

* जब % लाभ / हानि, क्रयमूल्य के बराबर हो - हानि के लिए

$$\text{क्रयमूल्य} = 10\sqrt{25 - \text{विक्रय}} - 50$$

Q किसी वस्तु को 16 ₹ में बेचने से एक दुकानदार को ठीक उतने ही % का हानि होता है, जितना वस्तु का क्रयमूल्य था। तो वस्तु का क्रयमूल्य बताइए ?

$$SP = 16 \rightarrow \begin{cases} 8 \times 10 = 80 \text{ (Posi Ans)} \\ 2 \times 10 = 20 \text{ (Positive Ans)} \end{cases}$$

Note = हानि वाले प्रश्न में दो उत्तर आएगा, परन्तु जो option में उत्तर दिया हो, वही Answer होगा

Q किसी वस्तु को 9 ₹ में बेचने से एक दुकानदार को ठीक उतने ही % का हानि होता है, जितना वस्तु का क्रयमूल्य था। तो वस्तु का क्रयमूल्य कितना होगा ?

$$SP \Rightarrow 9 \rightarrow \begin{cases} 9 \times 10 = 90 \text{ (Positive Ans)} \\ 1 \times 10 = 10 \text{ (Positive Rs Ans)} \end{cases}$$

* % त्रुटि या वैश्यानी पर मरन =

Q एक दुकानदार किसी वस्तु को क्रयमूल्य पर बेचने का दावा करता है, परन्तु तौलते समय वह 1 Kg बॉट के स्थान पर 750 gm बॉट का प्रयोग करता है, तो वह कितने % त्रुटि करता है ?

$$\% \text{ त्रुटि} = \frac{\text{त्रुटि} \times 100}{\text{तौल की मात्रा}}$$

$$\begin{aligned} \% \text{ त्रुटि} &= \frac{(1000 - 750) \times 100}{750} \\ &= \frac{250 \times 100}{750} \\ &= \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3} \% \end{aligned}$$

Q एक दुकानदार किसी वस्तु को क्रयमूल्य पर बेचने का दावा करता है परन्तु तौलते समय वह 25 gm बॉट के स्थान पर 20 gm बॉट का प्रयोग करता है तो वह कितने % त्रुटि करता है ?

$$\begin{aligned} \% \text{ त्रुटि} &= \frac{(25 - 20) \times 100}{20} \\ &= \frac{5 \times 100}{20} \\ &= 25 \% \text{ त्रुटि} \end{aligned}$$

Q एक दुकानदार किसी वस्तु को क्रयमूल्य पर बेचने का दावा करता है परन्तु लौटते समय वह 25% लुट करता है तो बताइये वह 1 kg वॉट के स्थान पर कितने gm वॉट का प्रयोग करता है।

$$\text{लुट} = 25\%$$

$$25 = \frac{(1000 - x) \times 100}{x}$$

$$25x = (1000 - x) \times 100$$

$$x = 4000 - 4x$$

$$5x = 4000$$

$$x = 800 \text{ gm}$$

⇒ 800 gm वॉट का प्रयोग करता है।

* जब m वस्तुओं को बेचने पर n वस्तुओं के क्रयमूल्य के बराबर लाभ/हानि हो -

$$\% \text{ लाभ/हानि} = \frac{n \times 100}{m}$$

Q 24 पुस्तकों को एक पुस्तक विक्रेता को 6 पुस्तकों के क्रयमूल्य के बराबर लाभ हुआ, तो उसका लाभ % बताइये?

$$\% \text{ लाभ} = \frac{6 \times 100}{24} = 25\% \quad \text{Ans}$$

Q 30 पुस्तकों को बेचने पर पुस्तक विक्रेता को 6 पुस्तकों के क्रयमूल्य के बराबर हानि हुआ, तो उसका हानि % बताइये?

$$\% \text{ हानि} = \frac{6 \times 100}{36}$$

$$= 20\% \text{ हानि}$$

* जब m वस्तुओं को बेचने पर n वस्तुओं के क्रयमूल्य के बराबर लाभ/हानि हो -

$$\% \text{ लाभ} = \frac{n \times 100}{m - n}$$

$$\% \text{ हानि} = \frac{n \times 100}{m + n}$$

Q 65 वस्तुओं को बेचने पर एक दुकानदार को 13 वस्तुओं के विक्रय के बराबर लाभ होता है, तो उसका % लाभ बताइये?

$$\% \text{ लाभ} = \frac{13 \times 100}{65 - 13}$$

$$= \frac{13 \times 100}{52} = 25\% \quad \text{ता}$$

इसरी विधि =

माना, 1 वस्तु का विक्रय = ₹ 1

65 वस्तु का विक्रय = ₹ 65

लाभ = ₹ 13

क्रयमूल्य = 65 - 13 = ₹ 52

$$\% \text{ लाभ} = \frac{13 \times 100}{52} = 25\%$$

Q 72 वस्तुओं को बेचने पर एक दुकानदार को 18 वस्तुओं के विक्रयशून्य के बराबर हानि होता है, तो उसका % हानि बताइये?

$$\begin{aligned}\% \text{ हानि} &= \frac{18 \times 100}{72 + 18} \\ &= \frac{18 \times 100}{90} \\ &= 20\% \text{ हानि}\end{aligned}$$

व्याज

साधारण व्याज

$$SI = \frac{P \times R \times t}{100}$$

$$A = P + SI$$

$$A = P \left(\frac{100 + Rt}{100} \right)$$

$$P = \frac{A \times 100}{100 + Rt}$$

जहाँ P = मूलधन

A = मिश्रधन

S.I = साधारण व्याज

R = दर

t = समय

साधारण प्रश्न =

जब किसी धन के "हो जाने" का अर्थ हो तो वह धन मिश्रधन होता है।

Q किसी धन का 7% दर से 4 वर्ष का साधारण व्याज 1120 रु है, तो वह धन बताइये?

$$S.I = \frac{P \times R \times t}{100}$$

$$1120 = \frac{P \times 7 \times 4}{100}$$

$$\frac{1120 \times 100}{28} = P$$

$$P = 4000 \text{ रु}$$

Q कोई धन साधारण व्याज की 6% दर से 5 वर्ष में 7800 रु हो जाता है तो उस धन का 8% दर से 9 का साधारण व्याज बताइये?

$$(100 + 6 \times 5) = 7800$$

$$130 = 7800$$

$$1 = \frac{7800}{130} = 60 \text{ रु}$$

$$\therefore 100 = 6000 \text{ रु}$$

$$SI = \frac{6000 \times 8 \times 9}{100}$$

$$= 60 \times 72 = 4320 \text{ रु}$$

Q 20000 रु का 4 वर्ष का साधारण व्याज 560 रु है, यदि व्याज की दर 3% बढ़ा दी जाए तो इतने ही समय का मिश्रधन बताइये?

Soln=

$$r = \frac{S.I \times 100}{P \times t}$$

$$= \frac{560 \times 100}{2000 \times 4} = 7\%$$

$$\therefore \text{नया दर} = 7+3 = 10\%$$

$$\text{नया S.I} = \frac{2000 \times 10 \times 4}{100}$$

$$= 20 \times 40 = 800 \text{ ₹}$$

$$\text{मिश्रधन} = 2000 + 800$$

$$= 2800 \text{ ₹}$$

Q कोई धन 5% की साधारण व्याज दर पर 7 वर्ष में 5400 ₹ हो जाता है तो वह धन बताइये?

$$(100 + 5 \times 7) = 5400$$

$$100 + 35 = 5400$$

$$1 = \frac{5400 - 40}{35}$$

$$\therefore 100 = 4000 \text{ ₹}$$

* जब दो समयों का मिश्रधन दिया हो=

Q कोई धन साधारण व्याज की दर से 3 वर्ष में 575 ₹ तथा 5 वर्ष में 625 ₹ हो जाता है।-तो-

(i) वह धन बताइये।

(ii) व्याज की दर बताइये।

$$2 \left[\begin{array}{l} 3 \text{ वर्ष} \rightarrow 575 \text{ ₹} \\ 5 \text{ वर्ष} \rightarrow 625 \text{ ₹} \end{array} \right] + 50 \text{ ₹}$$

अर्थात् 2 वर्ष का S.I = 50 ₹

1 वर्ष में S.I = 25 ₹

$\therefore$ 3 वर्ष का S.I = 75 ₹

$$\therefore \text{(i) मूलधन} = 575 - 75$$

$$= 500 \text{ ₹}$$

$$\text{(ii) SI} = \frac{P \times r \times t}{100}$$

$$r = \frac{SI \times 100}{P \times t}$$

$$= \frac{25 \times 100}{500 \times 1} = 5\%$$

Q कोई धन साधारण व्याज की दर से 4 वर्ष में 928 ₹ तथा 6 वर्ष में 992 ₹ हो जाता है तो-

(i) वह धन बताइये।

(ii) व्याज की दर बताइये।

$$2 \text{ वर्ष} \left[\begin{array}{l} 4 \text{ वर्ष} \rightarrow 928 \text{ ₹} \\ 6 \text{ वर्ष} \rightarrow 992 \text{ ₹} \end{array} \right] 64 \text{ ₹}$$

$$2 \text{ वर्ष SI} = 64$$

$$1 \text{ वर्ष में SI} = 32$$

$$\therefore 4 \text{ वर्ष में SI} = 32 \times 4$$

$$= 128$$

(i)

$$\therefore \text{मूलधन} = 928 - 128 = 800 \text{ ₹}$$

$$\text{(ii) } r = \frac{SI \times 100}{P \times t} = \frac{32 \times 100}{800 \times 1} = 4\%$$

* जब साधारण व्याज मूलधन का $\frac{m}{n}$ गुना हो - $(r=?)$ $\Rightarrow$

Q. किसी धन का साधारण व्याज, मूलधन के $\frac{2}{5}$ गुने के बराबर है। यदि समय 4 वर्ष हो तो व्याज की दर बताइये।

$$S.I = P \times \frac{2}{5}$$

$$\frac{S.I}{P} = \frac{2}{5}$$

$$r = \frac{S.I \times 100}{P \times t} = \frac{2 \times 100}{5 \times 4} = 10\%$$

Q. किसी धन का साधारण व्याज, मूलधन के $\frac{4}{25}$ गुने के बराबर है, यदि समय की वर्ष में संख्या, व्याज की दर के बराबर हो तो व्याज की दर बताइये।

$$S.I = P \times \frac{4}{25}$$

$$\frac{S.I}{P} = \frac{4}{25}$$

माना दर = $x\%$

तब समय = x वर्ष

$$\therefore \text{सूत्र से, } x = \frac{4 \times 100}{25 \times x}$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4$$

$\therefore$ दर = 4% व समय = 4 वर्ष

Q. किसी धन का साधारण व्याज, मूलधन के $\frac{3}{16}$ गुने के बराबर है, यदि समय की वर्ष में संख्या, दर के 3 गुने के बराबर हो तो व्याज की दर = ?

$$S.I = P \times \frac{3}{16}$$

$$\frac{S.I}{P} = \frac{3}{16}$$

$$r = \frac{S.I \times 100}{P \times t}$$

$$r = \frac{3 \times 100 \times 25}{16 \times 75}$$

$$r^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow r = \frac{5}{2}$$

$$r = 2.5\%$$

* जब मूलधन स्वयं का n गुना या $\frac{m}{n}$ गुना हो जाये =

Q. कोई धन साधारण व्याज की दर से 5 वर्षों में स्वयं $7\frac{1}{5}$ गुना हो जाता है, तो व्याज की दर बताइये?

$$P \times \frac{7}{5} = A$$

$$\frac{A}{P} = \frac{7}{5} \left\{ \begin{array}{l} \therefore \text{व्याज} = A - P = 7 - 5 \\ \text{व्याज} = 2 \end{array} \right.$$

$$S.I = \frac{5 \times 5 \times x}{100}$$

$$2 = \frac{5 \times 5 \times x}{100} \Rightarrow x = 8\%$$

48

Q कोई धन साधारण व्याज की दर से 8 वर्ष में स्वयं का 3 गुना हो जाता है, तो व्याज की दर बताइये।

$$P \times 3 = A$$

$$\frac{A}{P} = \frac{3}{1} \therefore \text{व्याज} = A - P = 3 - 1 = 2 \text{ ₹}$$

$$r = \frac{S.I \times 100}{P \times t} = \frac{2 \times 100}{1 \times 8} = \frac{200}{8} = 25\%$$

$$r = 25\%$$

* जब कोई धन t_1 वर्ष में n_1 गुना तथा t_2 वर्ष में n_2 गुना हो जाए-

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{(n_1 - 1)}{(n_2 - 1)}$$

Q कोई धन साधारण व्याज की दर से 5 वर्ष में स्वयं का 3 गुना हो जाता है, तो इसी दर से कितने वर्षों में स्वयं का 5 गुना जायेगा?

$$5 \text{ वर्ष} \Rightarrow 3 \text{ गुना}$$

$$t_2 \Rightarrow 5 \text{ गुना}$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{(n_1 - 1)}{(n_2 - 1)}$$

$$\frac{5}{t_2} = \frac{(3 - 1)}{(5 - 1)} \Rightarrow \frac{5}{t_2} = \frac{2}{4} \Rightarrow t_2 = 10 \text{ वर्ष}$$

$$t_2 = 10 \text{ वर्ष}$$

Q कोई धन साधारण व्याज की दर से 6 वर्ष में स्वयं का 1.5 गुना हो जाता है, तो इसी दर से कितने वर्षों में यह स्वयं का 2.5 गुना हो जायेगा?

$$6 \text{ वर्ष} \Rightarrow 1.5 \text{ गुना}$$

$$t_2 \text{ वर्ष} \Rightarrow 2.5 \text{ गुना}$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{(n_1 - 1)}{(n_2 - 1)}$$

$$\frac{6}{t_2} = \frac{(1.5 - 1)}{(2.5 - 1)}$$

$$\frac{6}{t_2} = \frac{0.5}{1.5} \Rightarrow t_2 = 18 \text{ वर्ष}$$

$$t_2 = 18 \text{ वर्ष}$$

* अब व्याजों का योग या अन्तर ज्ञात करें

Q किसी धन का 4% दर से 2 वर्ष और 5 वर्ष के साधारण व्याजों का योग 1120 रुपये है, तो वह धन बताइये?

$$2 \text{ वर्ष का S.I} + 5 \text{ वर्ष का S.I} = 1120$$

$$\frac{P \times 4 \times 2}{100} + \frac{P \times 4 \times 5}{100} = 1120$$

$$\frac{28P}{100} = 1120$$

$$P = \frac{1120 \times 100}{28}$$

$$P = 4000 \text{ ₹}$$

दूसरी विधि-

$$SI = \frac{P \times r \times t}{100}$$

$$P = \frac{SI \times 100}{r \times t}$$

$$P = \frac{40}{\cancel{4} \times (2+5)} \times 100 = 4000$$

Q किसी धन 5% दर से 3 वर्ष और 7 वर्ष के साधारण व्याजों का अन्तर 960 रुपये है, तो वह धन बताइये?

$$P = \frac{S.I \times 100}{r \times (\text{समयान्तर})}$$

$$= \frac{S.I \times 100}{r \times 4}$$

$$= \frac{960 \times 100}{5 \times 4}$$

$$= 4800 \text{ ₹}$$

दूसरी विधि-

$$7 \text{ वर्ष का } S.I - 3 \text{ वर्ष का } S.I = 960$$

$$\frac{P \times 5 \times 7}{100} - \frac{P \times 5 \times 3}{100} = 960$$

$$\frac{20P}{100} = 960$$

$$P = \frac{960 \times 5}{2}$$

$$P = 4800 \text{ ₹}$$

* जब व्याज की कई दरें हो-

$$\text{कुल व्याज} = t_1 \text{ वर्ष का } S.I + t_2 \text{ वर्ष का } S.I + t_3 \text{ वर्ष का } S.I$$

$$= \frac{P \times r_1 \times t_1}{100} + \frac{P \times r_2 \times t_2}{100} + \frac{P \times r_3 \times t_3}{100}$$

$$\text{कुल व्याज} = \frac{P}{100} [r_1 t_1 + r_2 t_2 + r_3 t_3]$$

Q एक व्यक्ति किसी बैंक से कुछ क इस शर्त पर ऋण लेता है, कि प्रथम 2 वर्ष के लिए 4% अगले 4 वर्ष के लिए 6% और इससे अधिक समय के लिए 8% व्याज देगा, वह व्यक्ति 9 वर्ष के अन्त में 11200 ₹ व्याज लौटाया हो तो उसने बैंक से कितने क ऋण लिया?

$$\text{प्रथम 2 वर्ष} \rightarrow 4\%$$

$$\text{अगले 4 वर्ष} \rightarrow 6\%$$

$$\text{अधिक} \rightarrow 8\%$$

$$\text{कुल व्याज} = 11200$$

$$11200 = \frac{P}{100} [4 \times 2 + 6 \times 4 + 8 \times 3]$$

$$11200 = \frac{P}{100} [56]$$

$$P = \frac{11200 \times 100}{56}$$

$$P = 20000 \text{ ₹}$$

Q एक व्यक्ति किसी बैंक से कुछ ₹ इस शर्त पर ऋण लेता है कि वह प्रथम 2 वर्ष के लिए 5%, अगले 3 वर्ष 8% और इससे अधिक समय के लिए 10% व्याज देगा, वह व्यक्ति 40 वर्ष के अन्त में 16800 ₹ व्याज लौटाया हो तो उसने बैंक से कितने ₹ ऋण लिया?

$$16800 = \frac{P}{100} [5 \times 2 + 8 \times 3 + 10 \times 5]$$

$$16800 = \frac{P}{100} [10 + 24 + 50]$$

$$\frac{16800 \times 100}{84} = P$$

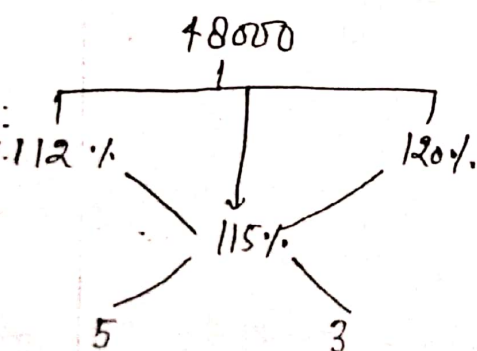
84

$$P = 20,000 \text{ ₹}$$

* व्याज की औसत दर =

(Alligation method) —

Q एक व्यक्ति ने 48000 ₹ को A व B में क्रमशः 12% और 20% के साधारण व्याज पर ऋण देता है। यदि वर्ष के अन्त में दोनों से मिलाकर उसे 15% की औसत दर से व्याज वापस मिला हो तो उसने B को कितने ₹ ऋण दिया?



A: B
अनुपाती योग = 8
$$= \frac{3}{8} \times 48000$$

$$= 18000 \text{ ₹}$$

Q एक व्यक्ति ने 40000 ₹ को व B में क्रमशः 6% और 8% के साधारण व्याज दर पर ऋण देता है, यदि $1\frac{1}{2}$ वर्ष के अन्त में दोनों से मिलाकर उसे 3960 ₹ व्याज मिला हो तो उसने A को कितने ₹ ऋण दिया?

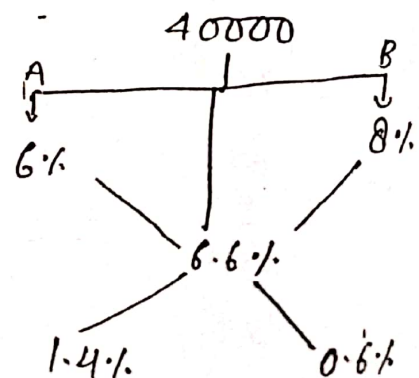
$$1\frac{1}{2} \text{ वर्ष} \rightarrow 3960 \text{ व्याज}$$

$$x = \frac{S.I \times 100}{P \times t}$$

$$= \frac{3960 \times 100}{40000 \times 3}$$

$$= \frac{396}{60} = 6.6\%$$

$$= \frac{396}{60} = 6.6\%$$



$$A: B = 1.4: 0.6$$

$$= 7:3$$

$$\text{अनुपाती योग} = 7+3=10$$

$$\begin{aligned} \text{A को ऋण} &= \frac{3}{17} \times 40000 \\ &= 28000 \text{ ₹} \end{aligned}$$

* जब अलग-अलग धन पर साधारण व्याज समान हो = Case-I
(Introduction)

Q 48000 ₹ का 5% दर से 7 वर्ष का साधारण व्याज उतना ही है, जितना 35000 ₹ का 8% दर से 7 वर्ष का तो 7 का मान बताइए?

$$\frac{48000 \times 5 \times 7}{100} = \frac{35000 \times 8 \times t}{100}$$

$$\frac{48000 \times 5 \times 7}{35000 \times 8} = t$$

$$t = 6 \text{ वर्ष}$$

* जब अलग-अलग धन पर साधारण व्याज समान हो = Case-II

Q 14400 ₹ को दो भागों में क्रमशः 4% और 3% की साधारण व्याज दर से क्रमशः 3 वर्ष और 5 वर्ष के लिए ऋण दिया गया। अवधि के अन्त में दोनों भागों से बराबर व्याज मिला हो तो 3% दर से दिया गया ऋण बताइए।

$$P_1 \times 4 \times 3 = P_2 \times 3 \times 5$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{4}$$

$$P_1 : P_2 = 5 : 4$$

$$\text{अनुपाती योग} = 9$$

$$\begin{aligned} \therefore P_2 &= \frac{4}{9} \times 14400 \\ &= 6400 \text{ ₹} \end{aligned}$$

Q 48000 ₹ को दो भागों में क्रमशः 3% और 2% की साधारण व्याज से क्रमशः 6 वर्ष और 5 वर्ष के लिए ऋण दिया गया। अवधि के अन्त में दोनों से बराबर व्याज मिला हो तो 3% दर से दिया गया ऋण बताइए?

$$\begin{array}{c} 48000 \\ \swarrow \quad \searrow \\ P_1, 3\%, 6 \text{ वर्ष} \quad P_2, 2\%, 5 \text{ वर्ष} \end{array}$$

$$\Rightarrow P_1 \times 3 \times 6 = P_2 \times 2 \times 5$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{9}$$

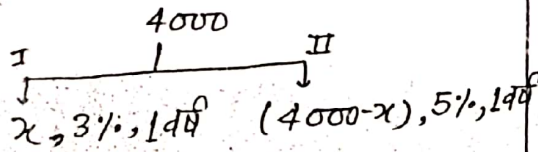
$$P_1 : P_2 = 5 : 9$$

$$\text{अनुपाती योग} = 14$$

$$P_1 = \frac{5}{14} \times 48000 = 1714.0 \text{ (लगभग)}$$

* जब अलग-अलग पर व्याजों का योग दिया हो =

Q 40000 ₹ को दो भागों में क्रमशः 3% और 5% की दर से ऋण दिया गया। यदि वर्ष के अन्त में दोनों भागों से मिलाकर 144 ₹ साधारण व्याज मिला हो तो 3% दर से दिया गया ऋण बताइये -



$$\Rightarrow \frac{x \times 3 \times 1}{100} + \frac{(40000-x) \times 5 \times 1}{100} = 144$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{100} + \frac{20000 - 5x}{100} = 144$$

$$\Rightarrow 20000 - 2x = 14400$$

$$\Rightarrow -2x = 14400 - 20000$$

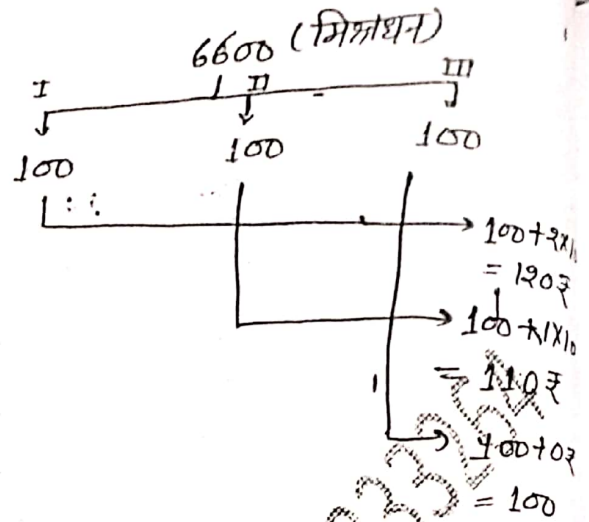
$$\Rightarrow -2x = -5600$$

$$x = \frac{5600}{2} = 2800 \text{ ₹}$$

→ पहली व्याज को 2800 ₹ ऋण दिया गया।

किस्त पर प्रश्न (Installment based Question) -

Q 66000 ₹ को 10% वार्षिक साधारण व्याज दर से 3 बराबर वार्षिक किस्तों में चुकाया जाना है, तो प्रत्येक किस्त का मान बताइये?



$$= (120 + 110 + 100)$$

$$= 330 \text{ (A)}$$

$$\Rightarrow 330 \times 2 = 660$$

$$1 = \frac{660}{330}$$

$$= 2$$

$$100 = 200 \text{ ₹}$$

Q 944 ₹ को 12% वार्षिक साधारण व्याज दर से 4 बराबर वार्षिक किस्तों में चुकाया जाना है, तो प्रत्येक किस्त का मान बताइये?

$$I \rightarrow 100 + 3 \times 12 = 136 \text{ ₹}$$

$$II \rightarrow 100 + 2 \times 12 = 124 \text{ ₹}$$

$$III \rightarrow 100 + 1 \times 12 = 112 \text{ ₹}$$

$$IV \rightarrow 100 + 0 = 100 \text{ ₹}$$

$$472 \text{ ₹ (A)}$$

$$472 = 944 \text{ ₹}$$

$$1 = 2 \text{ ₹}$$

$$100 = 200 \text{ ₹}$$

Q 1740 ₹ को 8% वार्षिक साधारण व्याज दर से 5 बराबर वार्षिक किस्तों में चुकाया जाना है तो प्रत्येक किस्त का मान बताइये?

$$100 + 4 \times 8 = 132$$

$$100 + 3 \times 8 = 124$$

$$100 + 2 \times 8 = 116$$

$$100 + 1 \times 8 = 108$$

$$100 + 0 = \frac{100}{540 \text{ ₹ (A)}}$$

$$540 = 1740$$

$$1 = 3 \text{ ₹}$$

$$100 = 300 \text{ ₹}$$

Q 1092 को 12% वार्षिक साधारण व्याज दर से 3 बराबर वार्षिक किस्तों में चुकाया जाना है तो प्रत्येक किस्त का मान बताइये?

$$100 + 2 \times 12 = 124$$

$$100 + 1 \times 12 = 112$$

$$100 + 0 = \frac{100}{336}$$

$$\Rightarrow 336 = 1092$$

$$1 = \frac{1092}{336}$$

$$= 3.25$$

$$100 = 325 \text{ ₹}$$

चक्रवृद्धि व्याज
(Compound Interest)

साधारण प्रश्न =

$$A = P \left(1 + \frac{r}{100} \right)^t$$

$\Rightarrow$ यदि समय भिन्नात्मक हो ($t = a \frac{b}{c}$ वर्ष)

$$A = P \left(1 + \frac{r}{100} \right)^a \times \left(1 + \frac{r \times b}{100 \times c} \right)$$

Q 8000 ₹ का 10% दर से $2\frac{1}{2}$ वर्ष का चक्रवृद्धि व्याज बताइये?

$$A = 8000 \left(1 + \frac{10}{100} \right)^2 \times \left(1 + \frac{10 \times 1}{100 \times 2} \right)$$

$$= 8000 \left(\frac{11}{10} \right)^2 \times \left(\frac{51}{50} \right)$$

$$= 8000 \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{51}{50}$$

$$= 80 \times 121 \times \frac{51}{50}$$

$$= \frac{80 \times 121 \times 51}{50}$$

$$A = \frac{80 \times 121 \times 51}{50}$$

$$A = \frac{968 \times 51}{5}$$

$$A = \frac{49368}{5}$$

$$A = 9873.6$$

$$\text{व्याज} = (A - P) \\ = 9873.6 - 8000 = 1873.6 \text{ ₹}$$

Q 5000 ₹ 10% वार्षिक चक्रवृद्धि व्याज दर से 4 वर्ष में 6655 ₹ हो जाता है तो $t = ?$

$$A = P \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

$$6655 = 5000 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^t$$

$$\frac{6655}{5000} = \left(\frac{11}{10}\right)^t$$

$$\Rightarrow \left(\frac{11}{10}\right)^t = \frac{1331}{1000}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{11}{10}\right)^t = \frac{1331}{1000}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{11}{10}\right)^t = \left(\frac{11}{10}\right)^3$$

$$\boxed{t = 3} \text{ वर्ष}$$

Q 10000 ₹ चक्रवृद्धि व्याज दर से 3 वर्ष में 1331 ₹ हो जाता है तो व्याज की दर बताइए?

$$1331 = 10000 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^3$$

$$\frac{1331}{10000} = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^3$$

$$\left(\frac{11}{10}\right)^3 = \left(\frac{100+r}{100}\right)^3 \therefore \left\{ \begin{array}{l} \text{घात समान} \\ \text{है।} \end{array} \right\}$$

$$\therefore \frac{11}{10} = \frac{100+r}{100}$$

$$110 = 100 + r$$

$$\boxed{r = 10\%}$$

* जब दो समयों का मिश्रण दिया

Point = कोई धन चक्रव्याज दर से t_1 वर्ष में R ₹ तथा t_2 वर्ष में R ₹ हो जाता है, तो इस सन्दर्भ के लिए सम्बन्ध -

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{t_2 - t_1} = \frac{R}{R}$$

Q कोई धन चक्रव्याज दर से 3 वर्ष में 800 ₹ तथा 4 वर्ष में 840 ₹ हो जाता है, तो व्याज की दर बताइए?

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{4-3} = \frac{840}{800}$$

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^1 = \frac{840}{800}$$

$$\frac{100+r}{100} = \frac{84}{80}$$

$$100+r = 105$$

$$\boxed{r = 5\%}$$

Q कोई धन चक्रव्याज दर से 3 वर्ष में 3600 ₹ तथा 5 वर्ष में 5184 ₹ हो जाता है, तो व्याज की दर बताइए?

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 = \frac{5184}{3600} = \left(\frac{94}{90}\right)^2$$

$$\frac{100+r}{100} = \frac{94}{90} \Rightarrow r = 120 - 100$$

$$\boxed{r = 20\%}$$

Q कोई धन चक्र व्याज दर से 2 वर्ष में 1000 रु तथा 5 वर्ष में 1728 रु हो जाता है, तो व्याज की दर बताइये?

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^3 = \left(\frac{1728}{1000}\right)$$

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right)^3 = \left(\frac{12}{10}\right)^3$$

$$1 + \frac{r}{100} = \frac{12}{10}$$

$$\frac{100+r}{100} = \frac{12}{10}$$

$$100+r = 120$$

$$r = 120 - 100$$

$$r = 20\%$$

Q जब कोई धन t_1 वर्ष में n_1 गुना तथा t_2 वर्ष में n_2 गुना हो जाए =

$$t_2 = t_1 \times a$$

$$\text{दूसरा गुना} = \text{पहला गुना}^a$$

Q कोई धन चक्रवृद्धि व्याज की दर से 5 वर्ष में स्वयं का दो गुना हो जाता है, तो उसी व्याज दर से कितने वर्षों में यह स्वयं का 8 गुना हो जायेगा?

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 \times a \\ &= 5 \times 3 \\ &= 15 \text{ वर्ष} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{दूसरा गुना} &= \text{पहला गुना}^a \\ 8 &= 2^a \\ 2^3 &= 2^a \\ a &= 3 \end{aligned}$$

Q कोई धन चक्र व्याज की दर से 12 वर्ष में स्वयं का 4 गुना हो जाता है, तो उसी व्याज दर से कितने वर्षों में यह स्वयं का 8 गुना हो जायेगा?

$$\text{दूसरा गुना} = \text{पहला गुना}^a$$

$$8 = 4^a$$

$$2^3 = 2^{2a}$$

$$a = \frac{3}{2}$$

$$t_2 = t_1 \times a$$

$$= 12 \times \frac{3}{2} = 18 \text{ वर्ष में}$$

Q कोई धन चक्र वृद्धि व्याज की दर से 7 वर्ष में स्वयं का 3 गुना हो जाता है, तो उसी व्याज दर से कितने वर्षों में यह स्वयं का 27 गुना हो जायेगा?

$$\text{दूसरा गुना} = \text{पहला गुना}^a$$

$$27 = 3^a$$

$$(3)^3 = 3^a$$

$$a = 3$$

$$\therefore t_2 = t_1 \times a$$

$$= 7 \times 3$$

$$= 21 \text{ वर्ष में}$$

52

जब साधारण व्याज और चक्रवृद्धि व्याज में अंतर ज्ञात हो = २ वर्ष के लिए

Note = किसी धन का विशेष दर से २ वर्ष के साधारण व्याज व चक्रवृद्धि व्याज में कोई अंतर नहीं होता।

$$\text{व्याजों का अंतर} = CI - SI$$

$$\text{व्याजों का अंतर} = P \left(\frac{r}{100} \right)^2$$

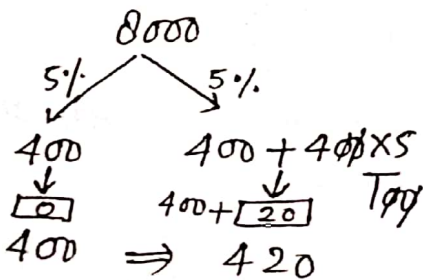
जब समय २ वर्ष के लिए दिया हो, तो यह Formula लगेगा।

८००० ₹ का ५% दर से २ वर्ष के साधारण व्याज और चक्रवृद्धि व्याज में अंतर बताइये।

$$\begin{aligned} \text{व्याजों का अंतर} &= P \left(\frac{r}{100} \right)^2 \\ &= 8000 \left(\frac{5}{100} \right)^2 \\ &= \frac{8000 \times 25}{100 \times 100} \end{aligned}$$

$$\text{व्याजों का अंतर} = 20 \text{ ₹}$$

दूसरी विधि =



$$\begin{aligned} \text{व्याजों का अंतर} &= 420 - 400 \\ &= 20 \text{ ₹} \end{aligned}$$

किसी धन का ५% दर से २ वर्ष के साधारण व्याज और चक्रवृद्धि व्याज में अंतर २४ ₹ है तो वह धन बताइये।

$$\text{व्याजों का अंतर} = P \left(\frac{r}{100} \right)^2$$

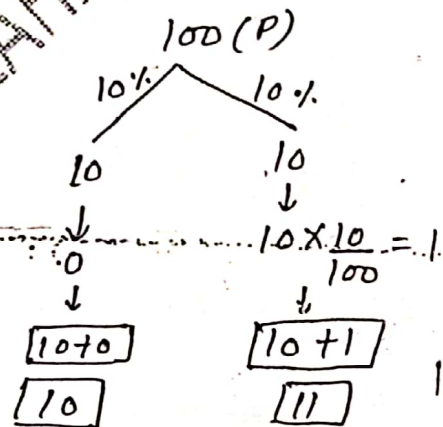
$$24 = P \left(\frac{5}{100} \right)^2$$

$$24 = P \left(\frac{1}{10} \right)^2$$

$$24 \times 100 = P$$

$$P = 2400 \text{ ₹}$$

दूसरी विधि =



$$\text{अंतर} = 24$$

$$1 = 24$$

$$100 = 24 \times 100$$

$$= 2400 \text{ ₹}$$

किसी धन का ५% दर से २ वर्ष के साधारण व्याज और चक्रवृद्धि व्याज में अंतर ८ ₹ हो तो वह धन बताइये?

$$\text{अंतर} = P \left(\frac{r}{100} \right)^2$$

$$8 = P \left(\frac{5}{100} \right)^2 \Rightarrow P = 8 \times 400$$

$$P = 3200 \text{ ₹}$$

* जब साधारण व्याज और चक्रवृद्धि व्याज में अंतर = 3 वर्ष के लिए

$$\text{व्याजों का अंतर} = P \left(\frac{r}{100} \right)^2 \times \left(\frac{r+300}{100} \right)$$

Q 80000 ₹ का 5% दर से 3 वर्ष के लिए S.I और C.I में अंतर ज्ञात कीजिए?

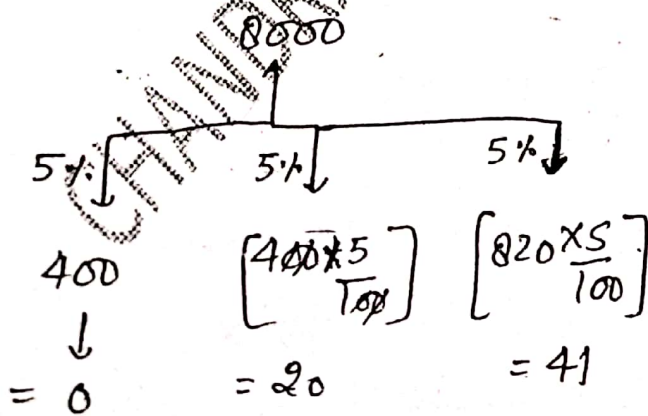
$$\text{व्याजों का अंतर} = 80000 \left(\frac{5}{100} \right)^2 \times \left(\frac{5+300}{100} \right)$$

$$= 80000 \left(\frac{1}{20} \right)^2 \times \frac{305}{100}$$

$$= \cancel{80000} \times \frac{1}{400} \times \frac{305}{100}$$

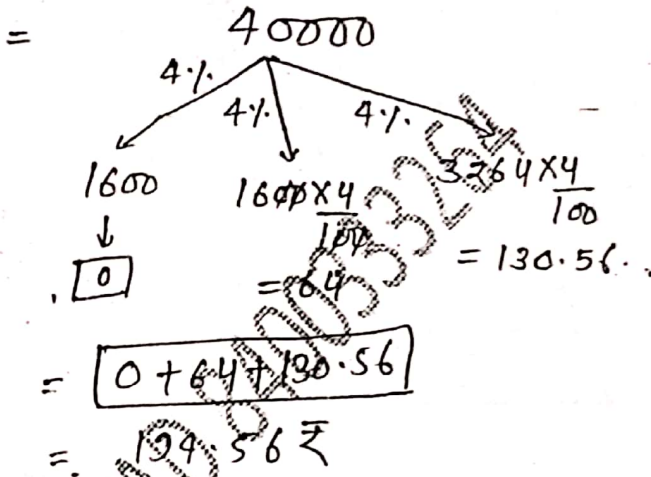
$$\text{अंतर} = 61 \text{ ₹}$$

दूसरी विधि =



$$= 0 + 20 + 41 = 61 \text{ ₹}$$

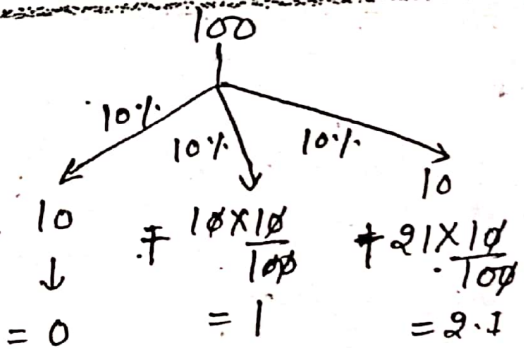
Q 40000 ₹ का 4% दर से 3 वर्ष के लिए S.I और C.I में अंतर ज्ञात कीजिए?



$$= 0 + 64 + 130.56$$

$$= 194.56 \text{ ₹}$$

Q किसी धन का 10% दर 3 वर्ष के S.I और C.I में 155 ₹ अंतर है तो वह धन बताइए?



$$= 0 + 1 + 2.1$$

$$= 3.1$$

$$\Rightarrow 3.1 = 155$$

$$1 = \frac{155}{3.1}$$

$$1 = 50$$

$$100 = 5000$$

Trick

$$155 = P \left(\frac{10}{100} \right)^2 \left(\frac{10+300}{100} \right)$$

$$155 = P \times \frac{1}{100} \times \frac{310}{100}$$

$$P = \frac{5}{155 \times 100 \times 100}$$

$$= 5 \times 10 \times 100$$

$$P = 5000 \text{ ₹}$$

* जब व्याज हमारी / तिमाही देय हो =

* जब व्याज हमारी संयोजित हो = तो

$$\text{दर} = \frac{\text{वार्षिक दर}}{2}$$

$$\text{समय} = \text{वर्षों में संख्या} \times 2$$

* जब व्याज तिमाही संयोजित हो तो =

$$\text{दर} = \frac{\text{वार्षिक दर}}{4}$$

$$\text{समय} = \text{वर्षों में संख्या} \times 4$$

Q 80000 ₹ का 20% वार्षिक दर से 3 महीने का चक्रवृद्धि व्याज बताइए यदि व्याज तिमाही संयोजित किया जाए -

$$A = P \left(1 + \frac{5}{100} \right)^3$$

$$= 80000 \times 21 \times 21 \times 21$$

$$= 80000 \times 21 \times 21 \times 21$$

$$A = 9261 \text{ ₹}$$

तिमाही दर

$$= \frac{20}{4} = 5\%$$

समय = 3 तिमाही

$$\begin{aligned} \text{चक्र व्याज} &= \text{मिश्रधन} - \text{मूलधन} \\ &= 9261 - 8000 \\ &= 1261 \text{ ₹} \end{aligned}$$

Q 400000 ₹ का 10% वार्षिक दर से 1 1/2 वर्ष का चक्रवृद्धि व्याज बताइए यदि व्याज हमारी संयोजित किया जाए

जब दूसरे वर्ष का चक्रवृद्धि व्याज दिया हो =

Q किसी धन का 5% दर से दूसरे वर्ष का चक्रवृद्धि व्याज 210 रु हो तो वह धन बताइये?

$$\left(P \times \frac{105}{100} \right) \times \frac{5}{100} = 210$$

$$\left(P \times \frac{21}{20} \right) \times \frac{1}{20} = 210$$

$$P = \frac{210 \times 400}{21}$$

$$P = 4000 \text{ रु}$$

दूसरी विधि =

$$\left[5 \times \frac{5}{100} = 0.25 \right]$$

$$5 + 0.25 \rightarrow 5.25$$

$$5.25 \rightarrow 210$$

$$1 \rightarrow 21000$$

$$525$$

$$1000$$

$$100 = \frac{21000}{525} \times 100$$

$$525$$

$$21$$

$$= 4000 \text{ रु}$$

Q किसी धन का 10% दर से दूसरे वर्ष का चक्रवृद्धि व्याज 572 रु है, तो वह धन बताइये?

$$\left(P \times \frac{110}{100} \right) \times \frac{10}{100} = 572$$

$$P \times \frac{11}{10} \times \frac{1}{10} = 572$$

$$P = \frac{572 \times 100}{11}$$

$$P = 5200$$

दूसरी विधि =

$$100 \begin{array}{l} \swarrow 10\% \searrow 10\% \\ 10 \quad 10 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 10 \times \frac{10}{100} = 1 \end{array}$$

$$10 + 1 = 11$$

$$11 = 572$$

$$1 = \frac{572}{11} = 52$$

$$1 = 52$$

$$100 = 5200 \text{ रु}$$

Q किसी धन 10% दरसे तीसरे वर्ष का चक्रवृद्धि व्याज 72.60 है, तो वह धन बताइए?

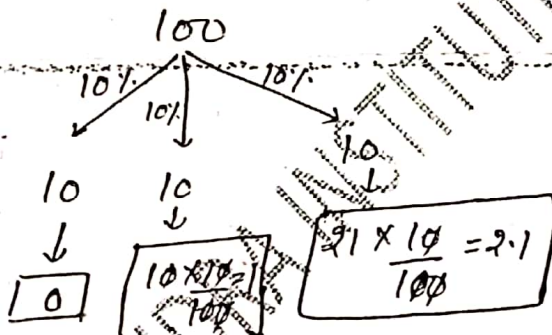
$$\left(P \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} \right) \times \frac{10}{100} = 72.60$$

$$P = \frac{72.60 \times 10 \times 10 \times 10}{11 \times 11}$$

$$= \frac{7260 \times 10}{121}$$

$$P = 600 \text{ ₹}$$

दूसरी विधि =



$$\text{Total व्याज} = 0.1 + 0.11 + 0.121$$

$$= 0.331$$

$$\Rightarrow 0.331 = 72.6$$

$$1 = \frac{72.6}{0.331} = 6$$

$$100 = 600 \text{ ₹}$$

* भव दो समीकों का मिश्रण दिया हो तो मूलधन ज्ञात करना =

Q कोई धन चक्रवृद्धि व्याज की दरसे 3 वर्ष में 3600 ₹ तथा 6 वर्ष में 4800 ₹ हो जाता है, तो वह धन बताइए?

$$3600 = P \left(1 + \frac{r}{100} \right)^3 \quad \text{--- (i)}$$

$$4800 = P \left(1 + \frac{r}{100} \right)^6 \quad \text{--- (ii)}$$

समीकरण (ii) ÷ समीकरण (i) —

$$\frac{4800}{3600} = \frac{P \left(1 + \frac{r}{100} \right)^6}{P \left(1 + \frac{r}{100} \right)^3}$$

$$\frac{4}{3} = \left(1 + \frac{r}{100} \right)^3 \quad \left\{ \text{यह मान समीकरण में रखेंगे} \right\}$$

$$3600 = P \times \frac{4}{3}$$

$$P = \frac{3600 \times 3}{4}$$

$$P = 2700 \text{ ₹}$$

दूसरी विधि =

$$\text{मूलधन} = \frac{(\text{द्वितीय मिश्रधन})^2}{\text{प्रथम मिश्रधन}}$$

$$= \frac{4800^2}{3600}$$

$$= 2700 \text{ ₹}$$

$$P = 2700 \text{ ₹}$$

Q कोई धन चक्रव्याज की दर से 4 वर्ष में 48000 रु तथा 8 वर्ष में 60000 रु हो जाता है तो वह धन बताइए ?

$$P = \frac{48000 \times 48000}{60000}$$

$$P = 38400 \text{ रु}$$

* किस्त पर प्रश्न -

Note - यदि प्रत्येक किस्त x रु तथा चुकायी जाने वाली राशि 'A' रु हो तो -

$$\frac{x}{(1+\frac{r}{100})} + \frac{x}{(1+\frac{r}{100})^2} + \frac{x}{(1+\frac{r}{100})^3} + \dots = A$$

Q 550 रु की 20% वार्षिक चक्रव्याज दर से 2 बराबर वार्षिक किस्तों में चुकाया जाना है, तो प्रत्येक किस्त का मान बताइए ?

$$\frac{x}{(1+\frac{20}{100})} + \frac{x}{(1+\frac{20}{100})^2} = 550$$

$$\frac{x}{(\frac{6}{5})} + \frac{x}{(\frac{6}{5})^2} = 550$$

$$\frac{5x}{6} + \frac{25x}{36} = 550$$

$$\frac{30x + 25x}{36} = 550$$

$$55x = 550 \times 36$$

$$x = \frac{550 \times 36}{55}$$

$$x = 360$$

प्रत्येक किस्त = 360 रु Ans

Q 16400 रु को 5% वार्षिक चक्रव्याज दर से 2 बराबर वार्षिक किस्तों में चुकाया जाना है, तो प्रत्येक किस्त का मान बताइए ?

$$\frac{x}{(1+\frac{5}{100})} + \frac{x}{(1+\frac{5}{100})^2} = 16400$$

$$\frac{x}{(1+\frac{5}{100})} + \frac{x}{(1+\frac{5}{100})^2} = 16400$$

$$\frac{x}{(\frac{21}{20})} + \frac{x}{(\frac{21}{20})^2} = 16400$$

$$\frac{20x}{21} + \frac{400x}{441} = 16400$$

$$\frac{20 \times 20x + 400x}{441} = 16400$$

$$820x = 16400 \times 441$$

$$x = \frac{16400 \times 441}{820} = 8820 \text{ रु}$$

औसत (Average)

$$\text{औसत} = \frac{\text{कुल पदों का योग}}{\text{कुल पदों की संख्या}}$$

$$\text{कुल पदों का योग} = \text{औसत} \times \text{कुल पदों की संख्या}$$

* जब समूह में कोई एक व्यक्ति शामिल हो या समूह से कोई एक व्यक्ति निकल जाए =

Q किसी समूह में 10 व्यक्तियों का औसत उम्र 24 वर्ष है। जब समूह में एक और व्यक्ति शामिल हो जाता है, तो पूरे सदस्यों की औसत उम्र में 3 वर्ष की वृद्धि हो जाती है, तो नये व्यक्ति की उम्र बताइये?

$$10 \text{ व्यक्ति के उम्र का योग} = 24 \times 10 = 240 \text{ वर्ष}$$

$$(10+1) \text{ व्यक्ति के उम्र का योग} = 25 \times 11 = 275 \text{ वर्ष}$$

$$\therefore \text{नया व्यक्ति का उम्र} = 275 - 240 = 35 \text{ वर्ष}$$

Q किसी समूह में 7 व्यक्तियों का औसत 65 Kg था। जब समूह में से एक व्यक्ति चला जाता है, तो पूरे सदस्यों के औसत भार में 1.5 Kg की कमी हो जाती है तो नये व्यक्ति का भार बताइये?

$$7 \text{ व्यक्ति के भारों का योग} = 65 \times 7 = 455 \text{ Kg}$$

$$6 \text{ व्यक्ति के भारों का योग} = 63.5 \times 6 = 381 \text{ Kg}$$

$\therefore$ बाये व्यक्ति का भार

$$= 455 - 381$$

$$= 74 \text{ Kg}$$

Q किसी समूह में 15 व्यक्तियों का औसत 74 Kg था। जब समूह में से एक व्यक्ति चला जाता है, तो पूरे सदस्यों के औसत भार में 0.5 Kg की वृद्धि हो जाती है, तो गये व्यक्ति का भार बताइये?

$$15 \text{ व्यक्तियों का योग} = 74 \times 15 = 1110 \text{ Kg}$$

$$14 \text{ व्यक्ति के भारों का योग} = 74.5 \times 14 = 1043 \text{ Kg}$$

$$\therefore \text{गये व्यक्ति का भार} = 1110 - 1043 = 67 \text{ Kg}$$

* जब समूह में कई व्यक्ति शामिल हों या समूह से कई व्यक्ति निकल जाय =

Q किसी परीक्षा में प्रथम 10 दानों का औसत प्राप्तांक 45 तथा अगले 15 दानों का औसत प्राप्तांक 40 है, तो सभी दानों का औसत प्राप्तांक बताइये -

प्रथम 10 दानों के प्राप्तांक का योग -
 $45 \times 10 = 450$

अगले 15 दानों का प्राप्तांक का योग -
 $= 40 \times 15$
 $= 600$

सभी (10+15) दानों का योग
 $= 450 + 600 = 1050$
 $\therefore$ औसत $= \frac{1050}{25}$
 $= 42$ प्राप्तांक

Q किसी समूह में 8 मजदूरों की दैनिक मजदूरी 150 ₹ थी, समूह से 6 मजदूर घिनकी औसत दैनिक मजदूरी 130 ₹ थी। समूह छोड़कर चले गये तो शेष बचे मजदूरों की औसत दैनिक मजदूरी बताइये?

8 मजदूरों की मजदूरी का योग $150 \times 8 = 1200$ ₹
 6 मजदूरों की मजदूरी का योग $130 \times 6 = 780$ ₹
 शेष 2 मजदूरी का योग 420 ₹

औसत मजदूरी $= \frac{420}{2}$
 $= 210$ ₹

Q A और B का औसत वेतन 6500 ₹,
 B और C का औसत वेतन 6800 ₹
 तथा C और A का औसत वेतन 6000 ₹
 हैं तो -
 1. तीनों का औसत वेतन बताइये?
 2. C का वेतन = ?

$A + B = 6500 \times 2 = 13000$ (i)
 $B + C = 6800 \times 2 = 13600$ (ii)
 $C + A = 6000 \times 2 = 12000$ (iii)

$2(A+B+C) = 38600$

$A+B+C = \frac{38600}{2}$

$A+B+C = 19300$

(i) तीनों का औसत वेतन $= \frac{19300}{3}$
 $= 6433.33$ ₹

(ii) C का वेतन $= (A+B+C) - (A+B)$
 $= 19300 - 13000$
 $= 6300$ ₹

* जब बीच की कोई संख्या ज्ञात करनी हो-

Q 15 संख्याओं का औसत 40 है. जिसमें प्रथम 9 संख्याओं का औसत 42 तथा अन्तिम 5 संख्याओं का औसत 38 है, तो 10 वीं संख्या बताइये?

$$15 \text{ संख्याओं का योग} = 15 \times 40 = 600$$

$$\text{प्रथम 9 संख्याओं का योग} = 9 \times 42 = 378$$

$$\text{अन्तिम 5 संख्याओं का योग} = 5 \times 38 = 190$$

$$\therefore 10 \text{ वीं संख्या} = 15 \text{ संका योग} - (9+5) \text{ संका योग}$$

$$10 \text{ वीं सं०} = 600 - (378 + 190)$$

$$= 600 - 568$$

$$= 32$$

* 40 सं० का औसत 60 है। जिसमें प्रथम 23 संख्याओं का औसत 58 तथा अन्तिम 18 संख्याओं का औसत 62 है. तो 23 वीं संख्या बताइये?

$$40 \text{ संख्याओं का योग} = 40 \times 60 = 2400$$

$$\text{प्रथम 23 सं० का योग} = 23 \times 58 = 1334$$

$$\text{अन्तिम 18 सं० का योग} = 18 \times 62 = 1116$$

$$\therefore 23 \text{ वीं सं०} = (23 + 18) \text{ सं० का योग} - (40 \text{ सं० का योग})$$

$$= (1334 + 1116) - 2400$$

$$= 2450 - 2400$$

$$= 50 \text{ Ans}$$

* तापमान पर प्रश्न=

Q किसी सप्ताह में सोमवार से बुधवार का औसत तापमान 36°C तथा मंगलवार से बृहस्पति का औसत तापमान 40°C है। यदि बृहस्पति का तापमान 39°C हो तो सोमवार का तापमान बताइये?

$$\text{सोम} + \text{मंगल} + \text{बुध} = 36 \times 3 = 108^\circ\text{C}$$

$$\text{मंगल} + \text{बुध} + \text{बृहस्पति} = 40 \times 3 = 120^\circ\text{C}$$

$$\text{सोम} - \text{बृहस्पति} = -12^\circ\text{C}$$

$$\text{सोमवार} - 39^\circ\text{C} = -12^\circ\text{C}$$

$$\text{सोमवार} = -12^\circ\text{C} + 39^\circ\text{C}$$

$$\boxed{\text{सोमवार} = 27^\circ\text{C}}$$

Q किसी सप्ताह में सोम० से बुध० का औसत तापमान 35°C तथा मंगल० से बृह० का औसत तापमान 32°C है। यदि बृहस्पति का तापमान, सोमवार के तापमान का $\frac{2}{3}$ हो तो सोमवार का तापमान बताइये?

$$\text{सोम०} + \text{मंगल०} + \text{बुध०} = 35 \times 3 = 105^\circ\text{C}$$

$$\text{मंगल०} + \text{बुध०} + \text{बृह०} = 32 \times 3 = 96^\circ\text{C}$$

$$\text{सोम} - \text{बृह०} = 9^\circ\text{C}$$

$$x - \frac{2x}{3} = 9$$

$$\frac{3x - 2x}{3} = 9$$

$$x = 9 \times 3$$

$$\boxed{x = 27^\circ}$$

अतः सोम का तापः

Q किसी सप्ताह में सोम० से बृह० का औसत तापमान 36°C तथा मंगल 1 से शुक्र० का औसत तापमान 32°C है। यदि शुक्र० का ताप, सोमवार के तापमान से 4°C कम हो तो शुक्रवार का तापमान बताइये?

$$\text{सोम०} + \text{मंगल} + \text{बुध} + \text{बृह०} = 36 \times 4 = 144$$

$$\text{मंगल} + \text{बुध} + \text{बृह०} + \text{शुक्र} = 32 \times 4 = 128$$

$$\text{सोम०} - \text{शुक्र} = 16$$

$$x - (x - 4) = 16$$

$$x - x$$

* औसत उम्र पर प्रश्न

Q A, B व C का औसत उम्र 25 वर्ष है। यदि इनके उम्रों का अनुपात 4:5:6 हो तो C का उम्र बताइये।

$$A, B \text{ व } C \text{ के उम्रों का योग} = 25 \times 3 = 75 \text{ वर्ष}$$

$$A : B : C = 4 : 5 : 6$$

$$\text{अनुपाती योग} = 15$$

$$C \text{ का उम्र} = \frac{6}{15} \times 75$$

$$= 30 \text{ वर्ष}$$

Q एक परिवार में 6 पुत्रों का औसत उम्र 8 वर्ष है। जब इनके माता व पिता को भी शामिल कर लिया जाता है तो पूरे सदस्यों की औसत उम्र 18 वर्ष हो जाती है। यदि इन पुत्रों के पिता की उम्र, इनकी माता का उम्र से 4 वर्ष अधिक हो तो इनके पिता की उम्र बताइये?

$$6 \text{ पुत्रों के उम्रों का योग} = 8 \times 6 = 48 \text{ वर्ष}$$

$$(6 + \text{माता} + \text{पिता}) \text{ के उम्रों का योग} = 18 \times 8 = 144 \text{ वर्ष}$$

$$\text{माता} + \text{पिता का उम्र} = 144 - 48 = 96 \text{ वर्ष}$$

$$x + (x + 4) = 96$$

$$2x = 92$$

$$x = 46 \text{ वर्ष}$$

$$\therefore \text{पिता की उम्र} = x + 4 = 46 + 4 = 50 \text{ वर्ष}$$

Q A व B का औसत उम्र 30 वर्ष, B व C का औसत उम्र 25 वर्ष तथा C व A का औसत उम्र 28 वर्ष है तो B की उम्र बताइये?

$$A \text{ व } B \text{ के उम्र का योग} = 30 \times 2 = 60$$

$$B \text{ व } C \text{ के उम्र का योग} = 25 \times 2 = 50$$

$$C \text{ व } A \text{ के उम्र का योग} = 28 \times 2 = 56$$

$$2(A + B + C) = 170$$

$$A + B + C = 85$$

$$\therefore B \text{ का उम्र} = (A+B+C) - (A+C)$$

$$= 85 - 56$$

$$= 29 \text{ वर्ष}$$

$$\therefore B \text{ का उम्र} = 29 \text{ वर्ष}$$

Q 3 वर्ष पूर्व A, B व C का औसत उम्र 27 वर्ष था, जबकि 5 वर्ष पूर्व B व C का औसत उम्र 25 वर्ष था तो वर्तमान में A की उम्र बताइए?

वर्तमान में A, B व C का औसत उम्र = 30 वर्ष

$$\therefore A, B \text{ व } C \text{ के औसत उम्र का योग} = 30 \times 3 = 90 \text{ वर्ष}$$

वर्तमान में B व C का औसत उम्र = 30 वर्ष

$$\therefore B \text{ व } C \text{ का औसत उम्र} = 30 \times 2$$

$$\text{का योग} = 60 \text{ वर्ष}$$

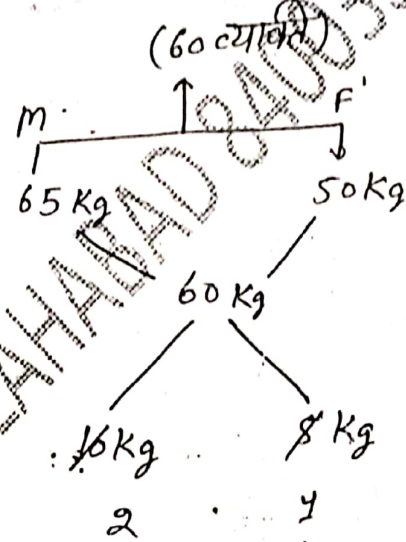
$$\therefore \text{वर्तमान में A का उम्र} = (A+B+C) - (B+C)$$

$$= 90 - 60$$

$$= 30 \text{ years}$$

* जब व्यक्तियों की उम्रों-2 से ज्यादा ज्ञात करनी हो =

Q किसी समूह में कुल 60 व्यक्ति हैं जिनका औसत भार 60 Kg है, इसमें पुरुषों का औसत भार 65 Kg तथा स्त्रियों का औसत भार 50 Kg है तो समूह में कितने पुरुष हैं?



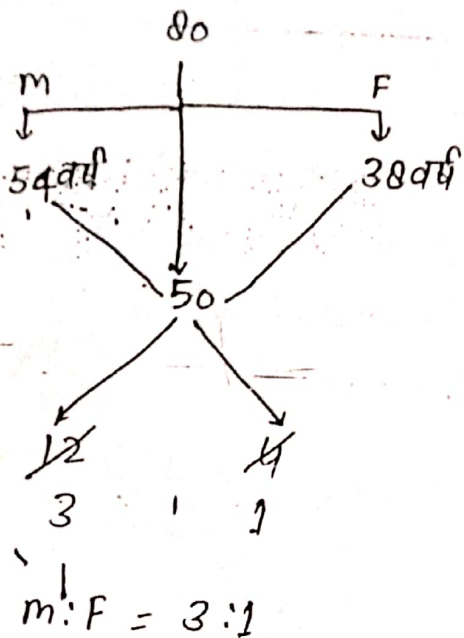
$$M : F = 2 : 1$$

अनुपाती योग = 3

$$\text{पुरुष की सं०} = \frac{2}{3} \times 60$$

$$= 40$$

Q किसी समूह में कुल 80 व्यक्ति हैं जिनका औसत उम्र 50 वर्ष है। इसमें पुरुषों का औसत उम्र 54 वर्ष तथा स्त्रियों का औसत उम्र 38 वर्ष है, तो समूह में कितनी स्त्रियाँ हैं?



अनुपाती योग = 4

$$\therefore \text{औसत की संख्या} = \frac{1}{4} \times 80 = 20$$

* चर राशियों के औसत पर प्रश्न *

Q m संख्याओं का औसत n^2 तथा n संख्याओं का औसत m^2 है तो $(m+n)$ संख्याओं का औसत बताइए?

- (A) $m^2 n^2$ (B) $m+n$
(C) mn (D) $\frac{1}{mn}$

$$(m+n) \text{ संख्याओं का औसत} = \frac{m \text{ सं० का योग} + n \text{ सं० का योग}}{(m+n)}$$

$$= \frac{m \cdot n^2 + n \cdot m^2}{(m+n)}$$

$$= \frac{m n [n + m]}{(m+n)}$$

$$= mn$$

Q a, b, c का औसत m है। यदि $ab+bc+ca=0$ हो तो a^2, b^2 व c^2 का औसत बताइए?

$$(a+b+c)^{\text{का योग}} = 3m$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर -

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = 9m^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(0) = 9m^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 9m^2$$

a^2, b^2 व c^2 का औसत -

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

$$= \frac{9m^2}{3} = 3m^2$$

Q यदि $5a+5b=625$ हो तो a व b का औसत बताइए?

$$5a+5b=625 \Rightarrow 5(a+b)=625$$

$$(a+b) = \frac{625}{5}$$

$$a+b=125$$

$$\therefore a \text{ व } b \text{ का औसत} = \frac{a+b}{2}$$

$$= \frac{125}{2}$$

$$= 62.5$$

58

* गलत - पाठ्योक्त (mis Reading)

पर प्रश्न =

एक दाल के 5 विषयों का औसत प्राप्तांक 72 था, परन्तु बाद में पता चला कि उसके एक विषय में प्राप्त अंक के स्थान पर गलती से 84 रख दिया गया। यदि अंक सही रखे जाते तो सही माध्य क्या होता?

सही औसत = कुल पदों की योग - गलत संख्या + सही संख्या

कुल पदों की संख्या

$$= \frac{72 \times 5 - 84 + 48}{5}$$

$$= \frac{408 - 84 + 48}{5} = \frac{372}{5} = 74.4$$

दूसरी विधि =

$$48 \xrightarrow{+36} 84$$

अंक ज्यादा = 36

$$\therefore \text{बढ़ा औसत} = \frac{36}{5} = 7.2$$

$$\text{सही औसत} = 72 - 7.2$$

$$= 64.8 \text{ Ans}$$

40 संख्याओं का औसत 60 था। परन्तु बाद में पता चला कि दो संख्याएँ क्रमशः 73 और 45 के स्थान पर गलती से 37 व 54 रख दिया गया। यदि संख्याएँ सही रखी जाती तो सही औसत क्या होता?

$$118 \xrightarrow{27 \text{ कम}} 91$$

$$\text{कमी} = 27$$

$$\text{औसत में कमी} = \frac{27}{40} = 0.675$$

$$\text{सही औसत} = 60 + 0.675$$

$$= 60.675 \text{ Ans}$$

* क्रिकेट पर प्रश्न - Class = I

बल्लेबाजी से प्रश्न =

एक बल्लेबाज के 19 वीं पारी तक रनों का औसत कुछ था। अगले पारी में वह 100 रन बनाता है, जिससे उसके कुल रन औसत में 2 रन की वृद्धि हो जाती है तो -

(i) उसके 19 वीं पारी तक रन औसत बताइये?

(ii) 20 वीं पारी तक वह कुल कितने रन बना चुका था?

माना: उसके 19 वीं पारी तक रन औसत = x

$$\therefore 19 \text{ वीं पारी तक रन योग} = 19x$$

$$\text{अब 20 वीं पारी के बाद रन औसत} \\ = (x+2)$$

$$\therefore 20 \text{ वीं पारी तक कुल रन} = (x+2) \times 20 \\ = 20x + 40$$

$$19x + 100 = 20x + 40$$

$$\boxed{x = 60}$$

(i) 19 वीं पारी तक रन 60 औसत हैं।

$$(ii) 20 \text{ वीं पारी तक रन का योग} \\ = 20 \times 60 + 40 \\ = 1240$$

इसरी विधि =

(i) 19 वीं पारी तक रन औसत = 20 वीं पारी का रन - $2x$ (कुल पद)

$$= 100 - 2 \times 20$$

$$= 100 - 40$$

$$= 60$$

$$(ii) 19 \text{ वीं पारी तक कुल रन} = 60 \times 19 \\ = 1140 \text{ रन}$$

$$\therefore 20 \text{ वीं पारी तक रन} = 1140 + 100 \\ = 1240$$

Q एक बल्लेबाज के 8 वीं पारी तक रनों का औसत कुछ था। अगले पारी में वह 27 रन बनाता है, जिसके उसके कुल रन औसत में 3 रन की कमी हो जाती है तो -

(i) उसके 8 वीं पारी तक रन औसत बताइए।

(ii) 9 वीं पारी तक वह कुल कितने रन बना चुका था।

(i) 8 वीं पारी तक रन औसत =

$$9 \text{ वीं} + 3 \times \text{कुल पद}$$

$$= 27 + 3 \times 9$$

$$= 54$$

$$(ii) 8 \text{ वीं पारी तक कुल रन} = \frac{54 \times 8}{1} \\ = 432 \text{ रन}$$

$$\therefore 9 \text{ वीं पारी तक रन} = 432 + 27 \\ = 459 \text{ रन}$$

क्रिकेट पर प्रश्न - (अ-II)

गेंदबाजी पर प्रश्न =

Q एक गेंदबाज के गेंद फेंकने का औसत 12.4 रन / विकेट था। अन्तिम मैच में उसे 26 रन देकर 5 विकेट लिया जिससे उसके कुल रन औसत प्रति विकेट में 0.4 की कमी आ गयी तो बताइए अन्तिम मैच तक वह कुल कितने विकेट ले चुका है?

अन्तिम मैच से पहले का औसत

अन्तिम मैच का औसत

$$12 \cdot 4$$

$$\frac{26}{5} = 5 \cdot 2$$

12

$$6 \cdot 8$$

$$0 \cdot 4$$

$$17$$

$$1$$

इसके पहले

last

$$17$$

$$1$$

$$\downarrow \times 5$$

$$\downarrow \times 5$$

$$85$$

$$+$$

$$5$$

$$= 90 \text{ विकेट}$$

अन्तिम मैच तक वह कुल 90 विकेट ले चुका है।

एक गेंदबाज के गेंद फेंकने का औसत 24.85 रन/विकेट था। अन्तिम मैच में उसने 52 रन देकर 5 विकेट लिया जिससे उसके कुल रन औसत प्रति विकेट में 0.85 की कमी आ गई तो बताइये अन्तिम मैच तक वह कुल कितने विकेट ले चुका है?

अन्तिम मैच से पहले का औसत

अन्तिम मैच का औसत

$$24 \cdot 85$$

$$\frac{52}{5} = 10 \cdot 4$$

24

$$13 \cdot 6$$

$$0 \cdot 85$$

$$1366$$

$$85$$

$$80$$

$$8$$

$$16 : 1$$

$$\downarrow \times 5$$

$$\downarrow \times 5$$

$$80 + 5 = 85$$

अन्तिम मैच तक कुल विकेट = 85

* जब किसी एक व्यक्ति के स्थान पर किसी अन्य व्यक्ति को शामिल कर लिया जाए =

10 व्यक्तियों के एक समूह में से 70 kg के एक व्यक्ति के चले जाने और उसके स्थान पर एक अन्य व्यक्ति के शामिल कर लेने से कुल औसत भार में 1.5 kg की वृद्धि हो जाती है तो नये व्यक्ति का भार बताइये?

नये व्यक्ति के आने से भार में कुल वृद्धि = $1.5 \times 10 = 15 \text{ kg}$

$$\therefore \text{नये व्यक्ति का भार} = 70 + 15 = 85 \text{ kg}$$

* औसत ज्ञात करना जब संख्याएँ समान होती हैं =

$$\text{औसत} = \frac{\text{प्रथम पद} + \text{अन्तिम पद}}{2}$$

प्रथम 125 क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं का औसत बताइए?

1, 2, 3, 4, --- 125

$$\begin{aligned}\text{औसत} &= \frac{1 + 125}{2} \\ &= \frac{126}{2} = 63\end{aligned}$$

36 से लेकर 140 तक की सभी प्राकृतिक संख्या का औसत बताइए?

36, 37, 38, --- 140

$$= \frac{36 + 140}{2} = \frac{176}{2} = 88$$

प्रथम 20 सम प्राकृतिक संख्याओं का औसत बताइए?

2, 4, 6, 8, --- 40

$$= \frac{2 + 40}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

25 के प्रथम 40 गुणजों का औसत बताइए?

25, 50, 75, ..., 1000

$$\begin{aligned}&= \frac{25 + 1000}{2} \\ &= \frac{1025}{2} = 512.5\end{aligned}$$

ल०स० और म०स०

(Least Common Multiple and Highest Common factor) =

ल०स० = वह न्यूनतम सं० जो दिए गए सभी संख्याओं से विभक्त हो जाए।

म०स० = वह अधिकतम सं० जो दिए गए सभी संख्याओं को विभक्त कर दे।

साधारण प्रश्न =

(i) साधारण ल०स० ज्ञात करना।

(ii) घातों का ल०स० और म०स० ज्ञात करना।

(iii) भिन्नो का ल०स० और म०स० ज्ञात करना।

(iv) दशमलव का ल०स० और म०स० ज्ञात करना।

(i) साधारण ल०स० ज्ञात करना =

(न्यूनतम, कम से कम, समपात्र दिया हो तो सर्वेक ल०स० ज्ञात करेंगे)

तीन पैमाने क्रमशः 27 cm, 36 cm व 45 cm के हैं, तो वह न्यूनतम लम्बाई ज्ञात कीजिए जो इन तीनों पैमानों को बराबर- बराबर मापी जा सके -

वह - न्यूनतम लम्बाई = 27, 36, 45 का ल०स०
= 540 cm

Q. द. बलियाँ क्रमशः 2, 4, 6, 8, 10 व 12 सेकण्ड के अन्तराल पर चलती हैं। यदि सभी बलियाँ अग्री एक साथ चली हो तो 30 मिनट में ये सभी कितनी बार एक साथ चलेंगी?

ये सभी पुनः एक साथ =
= 2, 4, 6, 8, 10 व 12 sec का ल०स०
= 120 sec या 2 min बाद चलेंगी।

अतः 30 min में एक साथ = $\frac{30}{2} + 1$

= 15 + 1

= 16 बार चलेंगी।

Q. चार बलियाँ क्रमशः 6 sec, 8, 9 व 12 sec के अन्तराल पर चलती हैं। यदि सभी बलियाँ 8:00 बजे एक साथ चली हो तो -

(i) फिर कितने बार एक साथ चलेंगी?

(ii) 10:00 बजे तक ये सभी कितनी बार एक साथ चलेंगी?

ये सभी पुनः एक साथ
= 8, 8, 9 व 12 का ल०स०
= 72 sec या 1 min 12 sec बाद चलेंगी।

(i) $\begin{array}{r} 4 \text{ min sec} \\ 8:00:00 \\ + \quad 01:12 \\ \hline 8:01:12 \text{ बजे।} \end{array}$

(ii) 8:00 से 10:00 बजे तक =
= 2 घण्टे
= $2 \times 60 \times 60 \text{ sec}$
= 7200 sec

= $\frac{7200}{72} + 1$

= 101 बार चलेंगी।

घातों का ल०स० तथा म०स० ज्ञात करना

घातों का म०स० = दिए गए घातों में प्रत्येक common आधार की न्यूनतम घात ही अभीष्ट म०स० होता है।

Ex- $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2, 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$

$2^4 \times 3^3 \times 7 \times 11^2$ का म०स० -

Solⁿ $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$

$2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11$

$2^4 \times 3^3 \times 7 \times 11^2$

$2^2 \times 3 \times 7 = \text{म०स०}$

* घातो कालंस० = दिए गये घातों में प्रत्येक आधार (common हो या न हो) की अधिकतम घात की ल०स० होता है।

Ex - $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2, 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11$
 $2^4 \times 3^3 \times 7 \times 11^2$ कालंस० =

$$\frac{2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 \times 2^4 \times 3^3 \times 7 \times 11^2}{2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11^2} = \text{ल०स०}$$

(iii) भिन्नों का ल०स० तथा म०स० ज्ञात करना =

भिन्नो का ल०स० = $\frac{\text{अंश का ल०स०}}{\text{हर का म०स०}}$

भिन्नो का म०स० = $\frac{\text{अंश का म०स०}}{\text{हर का ल०स०}}$

Ex $\frac{11}{14}, \frac{55}{42}, \frac{33}{35}, \text{ व } \frac{44}{63}$ का ल०स०

अंश ल०स० = $(11, 55, 33, 44)$ कालंस०
 $(14, 42, 35, 63)$ का म०स०
 $= \frac{660}{7} \text{ Ans}$

Ex $\frac{14}{33}, \frac{42}{55}, \text{ व } \frac{21}{22}$ का म०स० ज्ञात कीजिए

अंश ल०स० = $(14, 42, 21)$ का म०स०
 $(33, 55, 22)$ का ल०स०
 $= \frac{7}{330}$

(iv) दशमलव का ल०स० और म०स० ज्ञात करना -

1. सर्वप्रथम दशमलव के बाद अंकों की सं० समान करें।
2. अब दशमलव को हटाकर प्राप्त पूर्णांक का ल०स० या म०स० ज्ञात करें।
3. अब दशमलव को step (i) के अनुसार प्रतिस्थापित करें।

Ex $1.08, 0.36, \text{ व } 0.9$ का ल०स० बताइये

Step-1 := $1.08, 0.36, 0.90$

Step-2 := $108, 36, \text{ व } 90$ का ल०स०
 $= 540$

Step-3 := अंश ल०स० = 540 Ans

Ex $1.75, 5.6, \text{ व } 7$ का म०स० बताइये

Step-1 := $1.75, 5.60, \text{ व } 7.00$

Step-2 := $175, 560, \text{ व } 700$ का म०स०
 $= 35$

Step-3 := अंश म०स० = 0.35 Ans

दूसरी विधि-

$$= \frac{175}{100} \times \frac{7}{4}, \frac{56}{10} \times \frac{28}{5}, \frac{7}{1}$$

$$= \frac{7}{4}, \frac{28}{5}, \frac{7}{1} \text{ का म०स०}$$

$$= \frac{7, 28 \text{ व } 7 \text{ का म०स०}}{4, 5 \text{ व } 1 \text{ का ल०स०}}$$

$$= \frac{7}{20} = 0.35 \text{ Ans}$$

* ल०स० के शेष पर प्रश्न =

1. जब प्रत्येक दशा में ५ शेष बचे।
2. जब क्रमशः ५, ५ व २ शेष बचे।

1. जब प्रत्येक दशा में ५ शेष बचे-

Rule- सर्वप्रथम भाजक (दी गई संख्या) का ल०स० ज्ञात करके शेष (५) को जोड़ देते हैं।

2. जब क्रमशः ५, ५ व २ शेष बचे-

Rule- सर्वप्रथम भाजक व शेष का अन्तर ज्ञात करें, तत्पश्चात् भाजक का ल०स० ज्ञात करके अन्तर को घटा देते हैं।

Q वह-यूनतम संख्या बताइए जिसमें २५, २७ व ३६ से भाग देने पर प्रत्येक दशा में ७ शेष बचे?

$$24, 27 \text{ व } 36 \text{ का ल०स०} = 216$$

$$\therefore \text{वह-यूनतम सं०} = 216 + 7 = 223 \text{ Ans}$$

Q वह-यूनतम सं० बताइए जिसमें २७, ३६ व ४५ से भाग देने पर शेष क्रमशः २२, ३१ व ४० बचे?

भाजक - शेष अन्तर

$$27 - 22 = 5$$

$$36 - 31 = 5$$

$$45 - 40 = 5$$

$$\text{अब, } 27, 36 \text{ व } 45 \text{ का ल०स०} = 540$$

$$\therefore \text{वह-यूनतम सं०} = 540 - 5 = 535 \text{ Ans}$$

* म०स० के शेष पर प्रश्न =

1. जब प्रत्येक दशा में ५ शेष बचे।
2. जब क्रमशः ५, ५ व २ शेष बचे।
3. जब प्रत्येक दशा में समान शेष बचे।

1. जब प्रत्येक दशा में ५ शेष बचे-

ल०स० और म०स० के मिश्रण पर प्रश्न-

$$\boxed{\text{ल०स०} \times \text{म०स०} = \text{पहली संख्या} \times \text{दूसरी सं०}}$$

Q वह बड़ी से बड़ी संख्या बताएँ जिसको 134, 184 और 334 में भाग देने पर प्रत्येक दशा में 9 शेष बचे?

$$\begin{aligned} \text{Sol}^n &= \left. \begin{aligned} 134 - 9 &= 125 \\ 184 - 9 &= 175 \\ 334 - 9 &= 325 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{का म०स०} \\ &= 25 \end{aligned} \end{aligned}$$

Q वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिसको 40, 60 और 85 में भाग देने पर शेष क्रमशः 4, 6 व 13 बचे?

$$\begin{aligned} 40 - 4 &= 36 \\ 60 - 6 &= 54 \\ 85 - 13 &= 72 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} &\text{का म०स०} = 18 \end{aligned} \right.$$

Q वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिसको 545, 863 व 969 में भाग देने पर प्रत्येक दशा में समान शेष बचे?

$$\begin{aligned} 545, 863 \text{ व } 969 \\ 863 - 545 &= 318 \\ 969 - 863 &= 106 \\ 969 - 545 &= 424 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} &\text{का म०स०} \\ &= 106 \end{aligned} \right.$$

Q दो संख्याओं का गुणनफल 2550 है। यदि दोनों संख्याओं का म०स० 15 हो तो ल०स० बताइएँ?

$$\begin{aligned} \text{ल०स०} \times 15 &= 2550 \\ \text{ल०स०} &= \frac{2550}{15} = 170 \end{aligned}$$

Q दो सं० का अनुपात 3:4 है। यदि दोनों संख्याओं का ल०स० 480 हो तो दोनों संख्याओं का म०स० बताइएँ?

$$I : II = 3 : 4 \quad \text{माना म०स०} = x$$

$$\begin{aligned} \text{अतः पहली सं०} &= 3x \\ \text{दूसरी सं०} &= 4x \end{aligned}$$

$$\text{ल०स०} \times \text{म०स०} = \text{पहली सं०} \times \text{दूसरी सं०}$$

$$480 \times x = 3x \times 4x$$

$$480 = \frac{12x^2}{x}$$

$$x = \frac{480}{12} = 40$$

$$\therefore \text{म०स०} = 40$$

Q. दो संख्याओं का ल०स०, म०स० का 28 गुना है। यदि ल०स० तथा म०स० का योग 1740 हो तथा पहली सं० 420 हो तो, दूसरी संख्या बताइये?

$$\text{माना म०स०} = x$$

$$\therefore \text{ल०स०} = 28x$$

$$x + 28x = 1740$$

$$29x = 1740$$

$$x = 60$$

$$\text{म०स०} = 60$$

$$\text{ल०स०} = 1680$$

$$\text{ल०स०} \times \text{म०स०} = \text{पहली सं०} \times \text{दूसरी सं०}$$

$$1680 \times 60 = 420 \times \text{दूसरी सं०}$$

$$\text{दूसरी सं०} = \frac{1680 \times 60}{420}$$

$$\text{दूसरी सं०} = 240$$

Q. दो संख्याओं का योग 36 है। तथा

इन संख्याओं का ल०स० और म०स०

क्रमशः 105 व 3 है, तो इन संख्याओं

के व्युत्क्रमों का योग बताइये?

माना सं० x व y है।

$$\text{सब से, } x + y = 105 \times 3 = 315$$

$$\text{व्युत्क्रमों का योग, } \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$= \frac{x+y}{xy} = \frac{315}{315} = \frac{4}{35}$$

ल०स० के समापक पर प्रश्न =

छोटी जाने वाली सं० = रोषम

बड़ी जाने वाली सं० = भाजक-अंश

Q. 4 अंकों की वह अधिकतम संख्या बताइये जो 24, 27 व 36 से पूर्णतः विभक्त हो जाये?

$$\text{भाजक (24, 27 व 36) का ल०स०} = 216$$

$$\begin{array}{r} 216 \overline{) 9999} 46 \\ 864 \\ \hline 1359 \\ 1296 \\ \hline 63 \end{array}$$

4 अंकों की अधिकतम सं०

$$= 9999 - 63$$

$$= 9936 \text{ Ans}$$

Q. 5 अंकों की वह न्यूनतम संख्या बताइये जो 27, 36 व 45 से पूर्णतः विभक्त हो?

भाजक (27, 36 व 45) का

$$\text{ल०स०} = 540$$

$$5 \text{ अंकों की न्यूनतम सं०} = 10000$$

$$\begin{array}{r} 540 \overline{) 10000} 18 \\ 540 \\ \hline 4600 \\ 4320 \\ \hline 280 \end{array}$$

छोटी जाने वाली सं०

$$= 540 - 280$$

$$= 260$$

$$5 \text{ अंकों की न्यूनतम सं०} = 10000 + 260 = 10260 \text{ Ans}$$

ल० सं० के समापक पर विशेष प्रश्न =

कह-यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए,
जिसमें 8, 10, 12 व 15 से भाग
देने पर प्रत्येक दशा में 5 शेषफल
बचे परन्तु 13 से भाग देने पर
कुछ भी शेष न बचे?

$$\text{भाजक} = 8, 10, 12 \text{ व } 15 \text{ का ल० सं०} \\ = 120$$

$$\therefore \text{कह सं०} = (\text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेष}) \\ = (120 \times x + 5) \\ = 120x + 5$$

अब, 13 से भाग देने पर -

$$13 \overline{) 120x + 5} \begin{array}{r} 9x \\ 117x \\ \hline 3x + 5 \end{array}$$

3x का ऐसा मान लें
ताकि 13 से विभक्त
हो जाए।

$x = 7$ रखने पर -

$$= 120 \times 7 + 5 \\ = 840 + 5 = 845 \text{ Ans}$$

इसी विधि = इस प्रकार के प्रश्न को
option से हल करने पर
सबसे सरल तरीका है।

कह-यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए,
जिसमें 5, 10, 12 व 15 से भाग देने पर
प्रत्येक दशा में 2 शेष बचे, परन्तु 7
से भाग देने पर कुछ भी शेष न बचे?

(a) 169

(b) 343

(c) 182

(d) 162

$$\text{उत्तर की जाँच} = 7 \overline{) 182} \begin{array}{r} 26 \\ 14 \\ \hline 42 \\ 42 \\ \hline 0 \end{array}$$

दूसरी शर्त -

$$5 \overline{) 182} \begin{array}{r} 36 \\ 15 \\ \hline 32 \\ 30 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$10 \overline{) 182} \begin{array}{r} 18 \\ 10 \\ \hline 82 \\ 80 \\ \hline 2 \end{array}$$

Mensuration (क्षेत्रमिति)

Part-1 क्षेत्रफल (Area/2-D)

इसके अन्तर्गत हम द्वि-विमीय आकृतियों का अध्ययन करेंगे।

1. त्रिभुज (Triangle)
2. आयत (Rectangle)
3. जब आयताकार पार्क के चारों ओर बाहर/अन्दर से कोई रास्ता बनाया जाए।
4. जब आयताकार/वर्गाकार पार्क के ठीक बीचों-बीच परस्पर सन्निकोण काटते हुए दो मार्ग बनाया जाये।
5. समचतुर्भुज (Rhombus)
6. समलम्ब चतुर्भुज (Trapezium)
7. वृत्त (Circle)
8. विषयखण्ड (Sector of Circle)
9. B. समषट्भुज (Hexagon)
9. वर्ग और वृत्त पर मिश्रित प्रश्न
10. आयत और वृत्त पर मिश्रित प्रश्न
11. त्रिभुज और वृत्त पर मिश्रित प्रश्न
12. आयत और वर्ग वृत्त पर मिश्रित प्रश्न।

त्रिभुज (Triangle)

[1]

Note =

यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ a, b व c ज्ञात हों तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए-

Step-1

अर्धपरिमाप, $s = \frac{a+b+c}{2}$ ज्ञात करें

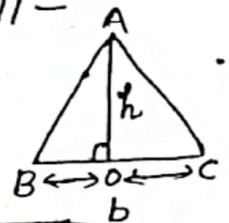
Step-2

$$\Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(Heron's Formula)

[2]

Note = यदि किसी Δ की कोई एक भुजा और उस भुजा से Δ की ऊँचाई ज्ञात हो तो-



$$\Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times b \times h$$

Q किसी त्रिभुज के आधार और ऊँचाई में अनुपात $5:4$ है। यदि Δ का क्षेत्रफल 250 cm^2 हो तो Δ की ऊँचाई बताइये।

$$\text{माना आधार} = 5x \text{ व ऊँचाई} = 4x$$

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times 5x \times 4x$$

$$250 = \frac{1}{2} \times 5x \times 4x$$

$$x^2 = \frac{250 \times 2}{5}$$

$$x^2 = 25, x = 5$$

$$\therefore \text{आधार} = 5x = 5 \times 5 = 25 \text{ cm}$$

$$\text{तथा ऊँचाई} = 4x = 4 \times 5 = 20 \text{ cm}$$

किसी Δ की तीनों भुजाएँ क्रमशः 20 cm, 21 cm व 13 cm हैं तो

(i) Δ का क्षेत्रफल बताइये।

(ii) सबसे छोटे शीर्षाभिन्तव की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

$$(i) s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$= \frac{20+21+13}{2}$$

$$= \frac{34+20}{2} = 27$$

$$\Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{27(27-20)(27-21)(27-13)}$$

$$= \sqrt{27(7)(6)(14)}$$

$$= \sqrt{27 \times 42 \times 14}$$

$$= \sqrt{3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 2 \times 3 \times 2 \times 7}$$

$$= 3 \times 3 \times 2 \times 7$$

$$= 9 \times 14 = 126 \text{ cm}^2$$

(ii) सबसे छोटे शीर्षाभिन्तव की लम्बाई =

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

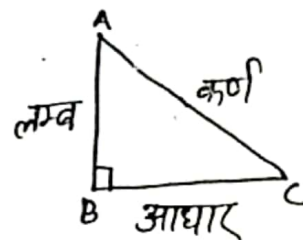
$$126 = \frac{1}{2} \times 21 \times h$$

$$h = \frac{126 \times 2}{21}$$

$$h = 12 \text{ cm}$$



[3] समकोण त्रिभुज से सम्बन्धित तथ्य =



$$\text{कर्ण}^2 = \text{लम्ब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{लम्ब}$$

समकोण Δ की पहचान (Ratio Rule) -

$$\rightarrow 3:4:5$$

$$\rightarrow 5:12:13$$

$$\rightarrow 7:24:25$$

$$\rightarrow 8:15:17$$

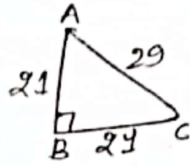
$$\rightarrow 9:40:41$$

$$\rightarrow 20:21:29$$

64

Q किसी त्रिभुजाकार खेत की तीनों भुजाएँ क्रमशः 20 मी०, 21 मी० और 29 मी० हैं। तो 25 ₹/मी०² की दर से खेत के फसल काटने का खर्च कितने रु होगा?

$$\begin{aligned} \text{खेत का क्षेत्र} &= \frac{1}{2} \times 20 \times 21 \\ &= 10 \times 21 \\ &= 210 \text{ मी०}^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \therefore \text{खर्च} &= 210 \times 25 \\ &= 5250 \text{ ₹} \end{aligned}$$

Q किसी त्रिभुज के तीनों भुजाओं का अनुपात 3:4:5 है। यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 216 cm² हो तो त्रिभुज का परिमाप बताइये?

माना त्रिभुज की तीनों भुजाएँ क्रमशः 3x, 4x व 5x cm हैं।

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$216 = \frac{1}{2} \times 3x \times 4x$$

$$x^2 = \frac{36}{2 \times 4}$$

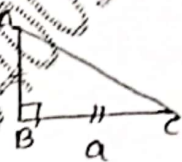
$$x^2 = 36$$

$$x = 6$$

$$\therefore \text{भुजाएँ} = 18, 24, 30 \text{ cm हैं।}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{त्रिभुज का परिमाप} &= 3x + 4x + 5x \\ &= 18 + 24 + 30 \\ &= 18 + 54 \\ &= 72 \text{ cm} \end{aligned}$$

Q किसी समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का परिमाप $4 + 2\sqrt{2}$ cm है, तो इसके कर्ण की लम्बाई बताइये?



$$AB = BC = a$$

$$\begin{aligned} \text{कर्ण, } AC &= \sqrt{a^2 + a^2} \\ &= \sqrt{2a^2} \end{aligned}$$

$$AC = a\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{त्रिभुज का परिमाप} = a + a + a\sqrt{2}$$

$$4 + 2\sqrt{2} = a(2 + \sqrt{2})$$

$$2(2 + \sqrt{2}) = a(2 + \sqrt{2})$$

$$a = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{कर्ण} &= a\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

Q किसी Δ की भुजाओं का अनुपात 7:24:25 है यदि Δ का क्षेत्रफल 2100 cm² हो तो इसकी सबसे छोटी भुजा बताइये?

माना त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः
 $7x$, $24x$ व $25x$ cm हैं।

$$\Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times 7x \times 24x$$

$$2100 = \frac{1}{2} \times 7x \times 24x$$

$$x^2 = \frac{200 \times 25}{2100 \times 24}$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5$$

$$\therefore \text{भुजाएँ} = 7 \times 5, 24 \times 5, 25 \times 5$$

$$= 35, 120, 125$$

(iv) समबाहु त्रिभुज के लिए =



ΔADB में =

$$AD (\text{लम्बाई}) = \sqrt{\text{कर्ण}^2 - \text{आधार}^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

समबाहु Δ की $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

$$\text{समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times h$$

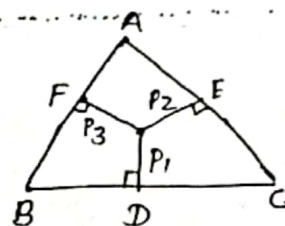
$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} BC \times AD$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\text{समबाहु } \Delta \text{ क्षेत्र} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

* यदि किसी समबाहु त्रिभुज के अन्दर किसी बिन्दु से इसकी तीनों भुजाओं पर डाली गयी लम्ब की लम्बाई P_1, P_2 व P_3 हो तो -

$$P_1 + P_2 + P_3 = h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$



Q किसी समबाहु Δ का क्षेत्रफल $25\sqrt{3}$ cm^2 है तो इस त्रिभुज का परिमाप बताइए?

$$\text{समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल} = 25\sqrt{3}$$

$$\text{समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$25\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$100 = a^2$$

$$a = 10$$

$$\therefore \text{त्रिभुज का परिमाप} = 10 + 10 + 10$$

$$= 30 \text{ cm}$$

Q किसी समबाहु Δ के अन्दर किसी बिन्दु से इसके तीनों भुजाओं पर डाले गये लम्ब की लम्बाई क्रमशः 6, 8, 10 cm हो तो Δ का क्षेत्रफल बताइये?

$$(P_1 + P_2 + P_3) = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$(6 + 8 + 10) = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\frac{24 \times 2}{\sqrt{3}} = a$$

$$a = \frac{48}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \text{समबाहु } \Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{48}{\sqrt{3}} \times \frac{12 \times 48}{\sqrt{3}}$$

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{12 \times 48}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{12 \times 48 \times \sqrt{3}}{3}$$

$$\text{क्षेत्रफल} = 192 \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Q किसी समबाहु Δ की प्रत्येक भुजा 2 cm बढ़ा देने से इसके क्षेत्रफल में $2\sqrt{3} \text{ cm}^2$ की वृद्धि हो जाती है तो Δ की प्रारम्भिक भुजा बताइये?

बड़े Δ का क्षेत्रफल - छोटे Δ का क्षेत्रफल = $2\sqrt{3}$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} (a+2)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} [(a+2)^2 - a^2] = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} [a^2 + 4 + 4a - a^2] = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} [8a] = 2\sqrt{3}$$

$$a = \frac{2 \times 4}{8}$$

$$\boxed{a = 1}$$

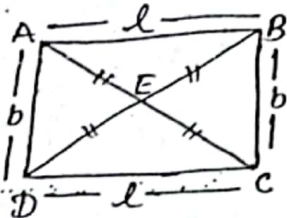
$\therefore$ त्रिभुज की प्रारम्भिक भुजा = 1 cm

आयत (Rectangle)

→ इसकी आग्ने-साग्ने की भुजा बराबर एवं समान्तर होती हैं।

→ इसके दोनों विकर्ण की लम्बाई समान होती हैं।

→ इसके दोनों विकर्ण एक-दूसरे को जिस बिन्दु पर काटते हैं, समद्विभाजित करते हैं परन्तु समकोण पर नहीं काटते।



$$\Rightarrow AC = BD$$

$$\Rightarrow AE = EC = DE = EB$$

$$\Rightarrow \text{आयत का क्षेत्रफल} = lb$$

$$\Rightarrow \text{आयत का परिमाप} = 2(l+b)$$

$$\Rightarrow \text{आयत का विकर्ण} = (\text{ल०})^2 + (\text{चौ०})^2$$

Q किसी आयत की लम्बाई इसकी चौड़ाई से 4 cm अधिक है यदि आयत का अर्द्धपरिमाप 36 cm हो तो इसका क्षेत्रफल बताइये?

$$\text{अर्द्धपरिमाप, } (l+b) = 36 \text{ cm}$$

$$\text{ल०} = x+4$$

$$\text{चौ०} = x$$

$$\Rightarrow (x+4)+x = 36$$

$$\Rightarrow 2x = 32$$

$$\Rightarrow x = 16$$

$$\therefore \text{चौ०} = 16$$

$$\text{ल०} = 16+4 = 20$$

$$\therefore \text{आयत का क्षेत्रफल} = l \times b \\ = 20 \times 16 \\ = 320 \text{ cm}^2$$

Q किसी आयत की लम्बाई व चौड़ाई में अनुपात 5:3 है यदि आयत का क्षेत्रफल 240 cm² हो तो आयत का परिमाप बताइये?

$$\text{मान ल०} = 5x$$

$$\text{चौ०} = 3x$$

$$\text{आयत का क्षेत्रफल} = l \times b$$

$$240 = 5x \times 3x$$

$$x^2 = \frac{240}{15}$$

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{ल०} = 5 \times 4 = 20 \text{ cm}$$

$$\text{चौ०} = 3 \times 4 = 12 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{आयत का परिमाप} = 2(l+b) \\ = 2(20+12) \\ = 2 \times 32 \\ = 64 \text{ cm}$$

Q किसी आयत का विकर्ण 25 cm तथा लं० 20 cm है, तो आयत का क्षेत्रफल बताइए?

आयत का क्षेत्रफल = ?

$$\text{विकर्ण}^2 = \text{लम्बाई}^2 + \text{चौड़ाई}^2$$

$$(25)^2 = (20)^2 + \text{चौड़ाई}^2$$

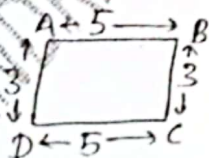
$$b^2 = 625 - 400$$

$$b^2 = 225$$

$$b = 15 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{आयत का क्षेत्रफल} &= \text{लं०} \times \text{चौ०} \\ &= 20 \times 15 \\ &= 300 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Q किसी आयत की लम्बाई तथा परिमाप में अनुपात 5:16 है तो लम्बाई तथा चौड़ाई में अनुपात बताइए?



$$\text{लं०} = 5$$

$$\text{परिमाप} = 16$$

$$2(l+b) = 16$$

$$2(5+b) = 16$$

$$2b = 16 - 10$$

$$2b = 6$$

$$b = 3$$

$$\therefore \text{चौड़ाई} = 3$$

$$\therefore \boxed{\text{लं०: चौ०} = 5:3}$$

दूसरी विधि =

$$\frac{l}{2(l+b)} \times \frac{5}{16}$$

$$\frac{8}{16} l = \frac{5}{16} (l+b)$$

$$8l = 5l + 5b$$

$$5b = 3l$$

$$\boxed{\frac{l}{b} = \frac{5}{3}}$$

$$l:b = 5:3 \text{ Ans}$$

Q किसी आयत की चौ०, लम्बाई का $\frac{3}{4}$ है। यदि आयत का क्षेत्रफल 768 cm^2 हो तो इसका परिमाप बताइए?

$$\text{लं०} = x$$

$$\text{चौ०} = x \times \frac{3}{4}$$

$$\text{आयत का क्षेत्रफल} = x \times \frac{3x}{4}$$

$$\frac{256}{768} = \frac{3x^2}{4}$$

$$x^2 = 1024$$

$$x^2 = 1024$$

$$x = 32$$

$$\therefore \text{लं०} = 32, \text{ चौ०} = \frac{3}{4} \times 32 = 24$$

$$\text{परिमाप} = 2(l+b)$$

$$= 2[32+24]$$

$$= 2 \times 56 = 112 \text{ cm}$$

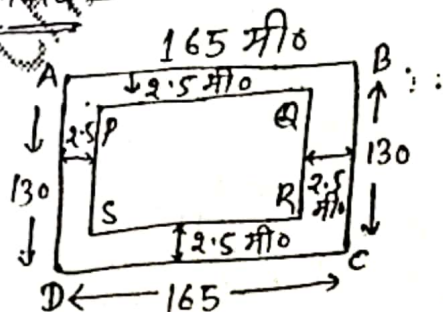
* अब किसी आयताकार / वर्गीकार
पार्क के चारों ओर बाहर / अन्दर
से कोई रास्ता बने =

$$\text{रास्ते का क्षेत्र} = 2 \times \text{रास्ते की चौ०} \\ (\text{पार्क की ल०} + \text{पार्क की चौ०} \\ + 2 \times \text{रास्ते की चौ०})$$

Q किसी आयताकार पार्क की ल० व
चौ० क्रमशः 165 मी० और 130 मी०
है। इस पार्क के चारों ओर अन्दर
से 2.5 मी० चौ० एक रास्ता बनाया
गया है तो रास्ते का क्षेत्रफल बताइये

$$\begin{aligned} \text{क्षेत्र} &= 2 \times 2.5 (165 + 130 + 2 \times 2.5) \\ &= 5 (160 + 130) \\ &= 5 \times 290 \\ &= 1450 \text{ मी०}^2 \end{aligned}$$

दूसरी विधि =



$$\begin{aligned} \text{रास्ते का क्षेत्र} &= \square ABCD - \square PQRS \\ &= 165 \times 130 - 160 \times 125 \\ &= 21450 - 20000 \\ &= 1450 \text{ मी०}^2 \end{aligned}$$

Q किसी आयताकार पार्क की ल० व चौ०
क्रमशः 235 मी० और 170 मी० है।
इस पार्क के चारों ओर बाहर से 5 मी०
चौ० एक रास्ता बनाया गया है तो
40 ₹ / मी०² की दर से रास्ते पर कंक्रीट
बिछाने का खर्च बताइये

$$\begin{aligned} \text{क्षेत्र} &= 2 \times 5 (235 + 170 + 2 \times 5) \\ &= 10 (235 + 180) \\ &= 4150 \text{ मी०}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{बिछाने का खर्च} &= 4150 \times 40 \\ &= 166000 \text{ ₹} \end{aligned}$$

$$\text{खर्च} = 166000 \text{ ₹ Ans}$$

* अब आयताकार / वर्गाकार पार्क के अन्दर ठीक बीचो-बीच परस्पर समकोण काटते हुए दो रास्ते बने =

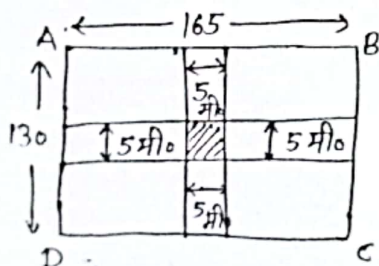
$$\text{रास्ते का क्षेत्रफल} = \text{रास्ते की चौ० (पार्क की ल० + पार्क की चौ० - रास्ते की चौ०)}$$

Q किसी आयताकार पार्क की लम्बाई और चौ० क्रमशः 165 मी० व 130 मी० है। इस पार्क के ठीक बीचो बीच परस्पर समकोण काटते हुए 5 मी० चौड़ा दो रास्ता बनाया गया है तो 20 ₹/वर्ग मी० की दर से रास्ते पर कंक्रीट बिछाने का खर्च कितने ₹ होगा?

$$\begin{aligned} \text{रास्ते का क्षेत्रफल} &= 5 (165 + 130 - 5) \\ &= 5 (160 + 130) \\ &= 5 \times 290 \\ &= 1450 \text{ मी}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{खर्च} &= 1450 \times 20 \\ &= 29000 \text{ ₹} \end{aligned}$$

दूसरी विधि =



$$\begin{aligned} \text{लम्बे अनुदिश रास्ते का क्षेत्रफल} \\ &= 165 \times 5 = 825 \text{ मी}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{चौ० के अनुदिश रास्ते का क्षेत्रफल} \\ &= 130 \times 5 = 650 \text{ मी}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{प्रतिच्छेद भाग का क्षेत्रफल} \\ &= (5)^2 = 25 \text{ मी}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{रास्ते का क्षेत्रफल} &= (825 + 650 - 25) \\ &= 1450 \text{ मी}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{खर्च} &= 1450 \times 20 \\ &= 29000 \text{ ₹} \end{aligned}$$

Q किसी आयताकार पार्क की ल० और चौ० क्रमशः 235 मी० व 190 मी० है। इस पार्क के ठीक बीचो-बीच परस्पर समकोण काटते हुए 10 मी० चौड़ा दो रास्ता बनाया गया है। तो 35 ₹/वर्ग मी० की दर से रास्ते पर कंक्रीट बिछाने का खर्च कितने ₹ होगा?

$$\begin{aligned} \text{रास्ते का क्षेत्रफल} &= 10 (235 + 190 - 10) \\ &= 10 (425 - 10) \\ &= 10 (415) \\ &= 4150 \text{ मी}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{खर्च} &= 4150 \times 35 \\ &= 145250 \text{ ₹} \end{aligned}$$

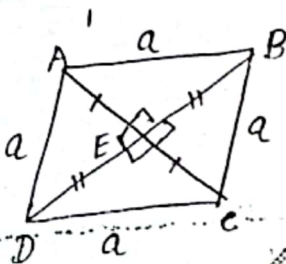
समचतुर्भुज (Rhombus) =

Properties of Rhombus =

1. इसकी प्रत्येक भुजा बराबर और आसने-सासने की भुजा समांतर होती है।

2. इसके दोनों विकर्णों की लम्बाइयाँ भिन्न-2 होती हैं।

3. इसके दोनों विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर काटते हैं और समद्विभाजित भी करते हैं।



(i) $AC \neq BD$

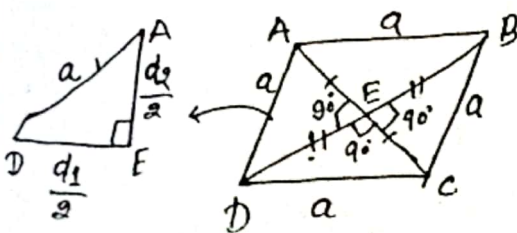
(ii) $\angle AED = \angle BEC = 90^\circ$

(iii) $AE = EC$ तथा $DE = BE$

माना, $BD = d_1$ तथा $AC = d_2$

4. समचतुर्भुज के भुजा और विकर्ण में

सम्बन्ध =



ΔAED में,

आधार $DE = \frac{d_1}{2}$

लम्ब $AE = \frac{d_2}{2}$

$\therefore a^2 = \frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4}$

$a^2 = \frac{1}{4}(d_1^2 + d_2^2)$

$4a^2 = d_1^2 + d_2^2$

अथ $\square ABCD = [अथ \Delta AED] \times 4$
 $= \left[\frac{1}{2} \times \frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2} \right] \times 4$

समचतुर्भुज = $\frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$
 का क्षेत्रफल

Q किसी समचतुर्भुज के दोनों विकर्णों की लम्बाइयाँ क्रमशः 10 cm व 24 cm हैं तो -

(i) समचतुर्भुज का परिमाप

(ii) इसका क्षेत्रफल = ?

$d_1 = 10 \text{ cm}$

$d_2 = 24 \text{ cm}$

$4a^2 = d_1^2 + d_2^2$

$4a^2 = (10)^2 + (24)^2$

$4a^2 = 100 + 576$

$a^2 = \frac{676}{4} = 169$

$a = 13$

68

$$\therefore \text{समचतुर्भुज का परिमाप} = 4a$$

$$= 4 \times 13 = 52 \text{ cm}$$

$$\text{समचतुर्भुज का क्षेत्रफल}$$

$$= \frac{1}{2} d_1 \times d_2$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 \times 24$$

$$= 120 \text{ cm}^2$$

Q किसी समचतुर्भुज के दोनों विकर्णों की लंबाई क्रमशः 30 cm व 40 cm हैं तो —

- (i) समचतुर्भुज का परिमाप = ?
(ii) इसका क्षेत्रफल = ?

$$d_1 = 30$$

$$d_2 = 40$$

$$4a^2 = d_1^2 + d_2^2$$

$$4a^2 = (30)^2 + (40)^2$$

$$4a^2 = 900 + 1600$$

$$4a^2 = 2500$$

$$a^2 = \frac{2500}{4}$$

$$a = \frac{50}{2} = 25 \Rightarrow a = 25$$

$$\text{समचतुर्भुज का परिमाप} = 4a$$

$$= 4 \times 25$$

$$= 100 \text{ cm}$$

$$\text{समचतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

$$= \frac{1}{2} \times 30 \times 40$$

$$= 30 \times 20$$

$$= 600 \text{ cm}^2$$

Q किसी समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा 5 cm तथा एक विकर्ण 8 cm है तो समचतुर्भुज का क्षेत्रफल क्या होगा?

$$4a^2 = d_1^2 + d_2^2$$

$$4 \times 5^2 = 8^2 + d_2^2$$

$$100 = 64 + d_2^2$$

$$d_2^2 = 100 - 64$$

$$d_2 = \sqrt{36}$$

$$d_2 = 6$$

$$\therefore \text{समचतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 6$$

$$= 24 \text{ cm}^2$$

Q किसी समचतुर्भुज के विकर्णों में अनुपात 2:3 है। यदि इसका क्षेत्रफल 1200 cm² हो तो बड़े विकर्णों की लंबाई बताइए?

माना दोनों विकर्ण क्रमशः 2x व 3x हैं।

$$\text{समचतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times 2x \times 3x$$

$$\frac{400}{1200} = x^2$$

$$x^2 = 400$$

$$\boxed{x = 20}$$

$$\therefore \text{बड़े विकर्ण की लंबाई} = 3x$$

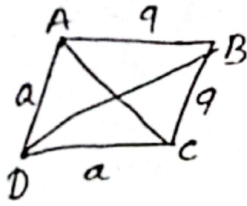
$$= 3 \times 20$$

$$= 60 \text{ cm}$$

$$\text{छोटे विकर्ण की लंबाई} = 2 \times 20 = 40 \text{ cm}$$

Q किसी समचतुर्भुज ABCD के संदर्भ में निम्न में से कौन कया सत्य है -

- (a) $2AB^2 = AC^2 + BD^2$
 (b) $4AD^2 = 3(AC^2 + BD^2)$
 (c) $4AD^2 = AC^2 + BD^2$
 (d) $3AD^2 = AC^2 + BD^2$



* समलम्ब चतुर्भुज (Trapezium)

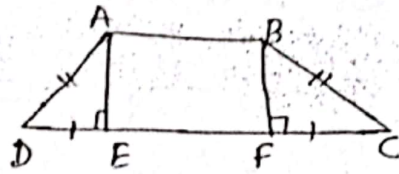
→ इसकी दो जोड़ी भुजाओं में केवल एक जोड़ी भुजा ही समांतर होती है।

→ समांतर जोड़ी लायें कभी समान लम्बाई की नहीं हो सकती।

→ असमांतर जोड़ी भुजा समान/असमान दोनों लम्बाई की हो सकती है।

→ समलम्ब का क्षेत्रफल =

$$= \frac{1}{2} \times (\text{समांतर भुजा का योग}) \times \text{इसके बीच की लम्बवत दूरी}$$



- (i) $AB \parallel DC$ परन्तु $AD \nparallel BC$
 (ii) $AB \neq CD$
 (iii) यदि असमांतर जोड़ी भुजा समान लम्बाई ($AD = BC$) की हो तो -

$$AB = EF$$

$$ED = FC$$

Q किसी समलम्ब चतुर्भुज की समांतर भुजाओं का अनुपात 3:5 है। तथा इनके बीच की लम्बवत दूरी 20 cm है। यदि समलम्ब का क्षेत्रफल 560 cm² हो तो इसकी समांतर भुजाएँ बताइये।

माना समांतर भुजाएँ क्रमशः 3x व 5x cm है।

$$\text{समलम्ब का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times (3x + 5x) \times 20$$

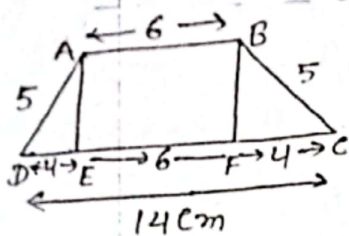
$$560 = \frac{1}{2} \times 8x \times 20$$

$$x = \frac{560}{80}$$

$$x = 7$$

$$\therefore \text{भुजाएँ} = 3 \times 7 = 21 \text{ cm} \\ = 5 \times 7 = 35 \text{ cm}$$

- Q किसी समलम्ब चतुर्भुज की समांतर भुजाएँ क्रमशः 6 cm व 14 cm हैं। यदि समांतर भुजाओं में प्रत्येक की लम्बाई 5 cm हो तो समलम्ब का क्षेत्रफल बताइये?



$\triangle AED$ में

$$5^2 = 4^2 + AE^2$$

$$25 = 16 + AE^2$$

$$AE^2 = 9$$

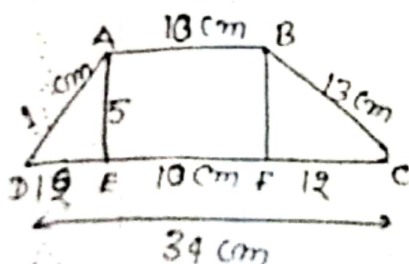
$$AE = 3$$

$$\text{समलम्ब का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} [6 + 14] \times 3$$

$$= \frac{1}{2} \times 20 \times 3$$

$$\therefore = 30 \text{ cm}^2$$

- Q किसी समलम्ब चतुर्भुज की समांतर भुजाएँ क्रमशः 10 cm व 34 cm हैं। यदि असमांतर भुजाओं में प्रत्येक की लंबाई 13 cm हो तो समलम्ब का क्षेत्रफल बताइये?



$\triangle AED$ में -

$$13^2 = 12^2 + AE^2$$

$$169 - 144 = AE^2$$

$$AE^2 = 25$$

$$AE = 5$$

$$\therefore = \frac{1}{2} [10 + 34] \times 5$$

$$= \frac{1}{2} \times 44 \times 5$$

$$= 22 \times 5$$

$$= 110 \text{ cm}^2$$

वृत्त (Circle) =

$$\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$

$$\text{वृत्त का परिधि} = 2\pi r$$

$$\text{परिधि द्वारा 1 चक्कर में तय दूरी} \\ = \text{परिधि की परिधि} = 2\pi r$$

$$\text{चक्करों की संख्या} = \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{1 चक्कर में तय दूरी}}$$

Q किसी वृत्त की परिधि 88 सेमी है तो उस वृत्त का क्षेत्रफल बताइए?

$$\text{वृत्त की परिधि} = 2\pi r$$

$$88 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$\frac{88 \times 7}{2 \times 22} = r \Rightarrow r = 14$$

$$\therefore \text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2 \\ = \frac{22}{7} \times 14^2$$

$$= 44 \times 14$$

$$\text{क्षे०} = 616 \text{ cm}^2$$

Q किसी वृत्त की परिधि और विज्या में अंतर 37 सेमी है तो उस वृत्त का क्षेत्रफल बताइए?

$$\text{वृत्त की परिधि} - \text{विज्या} = 37$$

$$2\pi r - r = 37$$

$$r(2 \times \frac{22}{7} - 1) = 37$$

70

$$r \left[\frac{44 - 7}{7} \right] = 37$$

$$r \left[\frac{37}{7} \right] = 37$$

$$\frac{37r}{7} = 37$$

$$r = 7$$

$$\therefore \text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2 \\ = \frac{22}{7} \times 7^2 \times 7 \\ = 154 \text{ cm}^2$$

Q दो सकेन्द्रीय वृत्तों की परिधि क्रमशः 88 cm व 132 cm है, तो इसके वलय भाग का क्षेत्रफल बताइए?

$$\text{छोटे वृत्त की परिधि} = 2\pi r$$

$$88 = 2\pi r$$

$$r = \frac{88 \times 7}{2 \times 22}$$

$$r = 14 \text{ cm}$$

$$\text{बड़े वृत्त की परिधि} = 2\pi R$$

$$\therefore 132 = 2\pi R$$

$$R = \frac{132 \times 7}{2 \times 22}$$

$$R = 21 \text{ cm}$$

$$\text{वलय भाग का क्षेत्रफल} = \pi R^2 - \pi r^2 \\ = \pi (R^2 - r^2)$$

$$= \frac{22}{7} (21^2 - 14^2)$$

$$= \frac{22}{7} (35 \times 7) = 22 \times 35 \\ = 770 \text{ cm}^2$$



Q किसी पहिए की त्रिज्या 1.75 मी० है तो यह पहिया 22 km की दूरी तय करने में कितने चक्कर लगायेगी?

$$\text{पहिये का चक्कर में तय दूरी} = 2 \times \frac{22}{7} \times 1.75$$

$$= 2 \times 22$$

$$= 44 \text{ m}$$

$$\therefore \text{कुल चक्कर} = \frac{22000 \text{ मी०}}{44 \text{ मी०}} = 500 \text{ चक्कर}$$

Q किसी वृत्ताकार मैदान का क्षेत्रफल 616 km² है, तो 22 km/hr की चाल से इसके चारों ओर 4 चक्कर लगाने में कितना समय लगेगा?

$$\text{वृत्ताकार मैदान का क्षेत्रफल} = 616$$

$$\pi r^2 = 616$$

$$\frac{22}{7} \times r^2 = 616$$

$$r^2 = \frac{616 \times 7}{22}$$

$$r^2 = 196$$

$$r = 14 \text{ km}$$

$$\therefore \text{वृत्ताकार मैदान की परिधि} = 2\pi r$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14$$

$$= 4 \times 22$$

$$\text{परिधि} = 88 \text{ km}$$

$$\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{88 \times 4}{22}$$

$$\text{समय} = 4 \text{ घंटे}$$

Q किसी वृत्त की त्रिज्या 2 cm बढ़ा देने से इसके क्षेत्रफल में 88 cm² की वृद्धि हो जाती है, तो वृत्त की प्रारम्भिक त्रिज्या बताइये?

$$\pi (r+2)^2 - \pi r^2 = 88$$

$$\pi [(r+2)^2 - r^2] = 88$$

$$\pi [r^2 + 4 + 4r - r^2] = 88$$

$$\pi [4 + 4r] = 88$$

$$\frac{22}{7} [4 + 4r] = 88$$

$$4 + 4r = \frac{88 \times 7}{22}$$

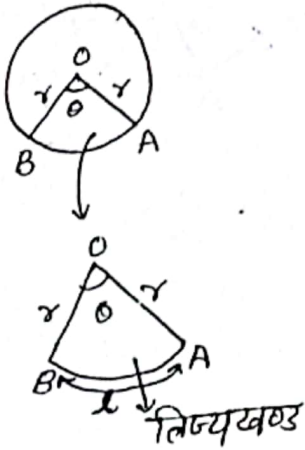
$$4r = 24$$

$$\boxed{r = 6}$$

$$\text{प्रारम्भिक त्रिज्या} = 6 \text{ cm}$$

त्रिज्यखण्ड (Sector of Circle) =

वृत्त की दो त्रिज्याओं तथा उसके आन्तरिक बिन्दु से बने चाप द्वारा वृत्त को काटकर अलग किए गए भाग को त्रिज्यखण्ड कहते हैं।



त्रिज्यखण्ड में चाप AB की लम्बाई =

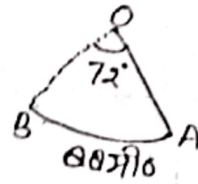
$$l = \frac{2\pi r \times \theta}{360^\circ}$$

त्रिज्यखण्ड (OAB) का क्षेत्रफल =

$$\text{क्षे०} = \frac{\pi r^2 \times \theta}{360^\circ}$$

एक घोड़ा जो किसी रस्सी से बंधा है, रस्सी को खींचे हुए वृत्तीय पथ बनाकर 88 मी० चलकर रुकता है। वह जिस बिन्दु पर रुकता है केन्द्र पर 72° कोण आन्तरित करता है तो रस्सी की लम्बाई बताइये?

71



$$l = \frac{2\pi r \times \theta}{360^\circ}$$

$$88 = \frac{2 \times \frac{22}{7} \times r \times 72}{360}$$

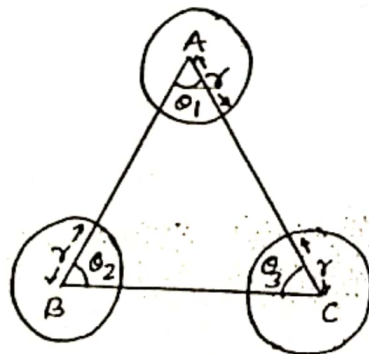
$$r = \frac{88 \times 360 \times 7}{2 \times 22 \times 72}$$

$$r = 100 \text{ मी०}$$

$$r = 70 \text{ मी०}$$

Note = यदि किसी Δ के तीनों शीर्षों

को केन्द्र मानकर समान त्रिज्या के वृत्त खींचे जायें तो जो अन्य को प्रतिच्छेद न करे तो वृत्त के उस भाग का क्षेत्रफल जो त्रिभुज में है, अर्द्धवृत्त के क्षेत्रफल के बराबर होगा।



वृत्त के उस भाग का क्षेत्रफल जो Δ में है

$$= \pi r_1^2 \times \frac{\theta_1}{360^\circ} + \pi r_2^2 \times \frac{\theta_2}{360^\circ} + \pi r_3^2 \times \frac{\theta_3}{360^\circ}$$

$$= \pi r^2 \left[\frac{\theta_1}{360^\circ} + \frac{\theta_2}{360^\circ} + \frac{\theta_3}{360^\circ} \right]$$

$$= \frac{\pi r^2}{360} [0_1 + 0_2 + 0_3]$$

$$= \frac{\pi r^2}{360} [180^\circ]$$

$$= \frac{\pi r^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2} \pi r^2}$$

Q किसी त्रिभुजाकार खेत की तीनों भुजाएँ क्रमशः 20 मी, 21 मी० व 29 मी० हैं। खेत के तीनों कोनों पर 7 मी० बराबर लम्बाई की रस्सी से गाय बाँधी गयी है, तो ये तीनों गाय खेत के अधिकतम कितने क्षेत्रफल का घास चर सकती हैं?

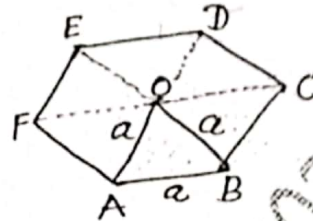
$$= \frac{1}{2} \pi r^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

$$\text{क्षे०} = 77 \text{ मी०}$$

समषट्भुज (Hexagon) =

ह: समबाहु Δ से घिरी हुई (बन्द) आकृति समषट्भुज कहलाता है।



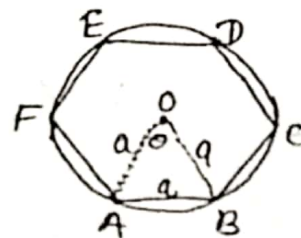
समषट्भुज का क्षेत्रफल = एक समबाहु का क्षेत्रफल $\times 6$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times 6$$

$$\boxed{\text{समषट्भुज का क्षे०} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2}$$

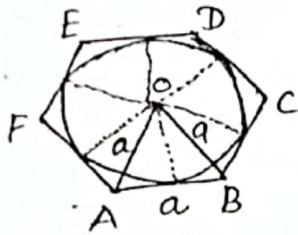
यदि किसी समषट्भुज के शीशों को स्पर्श करता हुआ कोई वृत्त खींचा जाये तो परिवृत्त की त्रिज्या।

$$\boxed{R = \text{समषट्भुज की भुजा} = a}$$



यदि किसी समषट्भुज के भुजाओं को स्पर्श करता हुआ कोई वृत्त खींचा जाये तो अन्तर्दृक्की त्रिज्या, $r =$ समबाहु Δ की उ०

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$



Q किसी समषट्भुज का क्षेत्रफल $54\sqrt{3} \text{ cm}^2$ है, तो समषट्भुज का परिमाप बताइये?

$$\text{परिमाप} = 6a$$

$$\text{समषट्भुज का क्षेत्रफल} = 54\sqrt{3}$$

$$3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 54\sqrt{3}$$

$$a^2 = \frac{54 \times 2}{3}$$

$$a^2 = 36$$

$$a = 6$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{समषट्भुज का परिमाप} &= 6a \\ &= 6 \times 6 \\ &= 36 \text{ cm} \end{aligned}$$

Q किसी समषट्भुज के प्रत्येक भुजा $14\sqrt{3} \text{ cm}$ हैं, यदि इस समषट्भुज के प्रत्येक भुजा को स्पर्श करता हुआ वृत्त खींचा जाय तो उस वृत्त का क्षेत्रफल बताइये?

$$\text{अन्तः वृत्त की त्रिज्या} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 14\sqrt{3}$$

$$= 7 \times 3 = 21 \text{ cm}$$

$$r = 21 \text{ cm}$$

$$\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

$$= 22 \times 63$$

$$= 1386 \text{ cm}^2$$

Q किसी समषट्भुज के परिवृत्त की त्रिज्या r है, तो समषट्भुज का परिमाप बताइये?

$$\text{समषट्भुज के परिवृत्त की त्रिज्या} =$$

$$\text{समषट्भुज की भुजा}$$

$$r = \text{समषट्भुज की भुजा}$$

$$\therefore \text{भुजा} = r$$

$$\therefore \text{समषट्भुज का परिमाप} = 6r$$

* किसी समष्ट्रुल के प्रत्येक शीर्ष को स्पर्श करता हुआ, एक वृत्त खींचा गया है, यदि समष्ट्रुल की प्रत्येक भुजा 14 cm हो तो उस वृत्त का क्षेत्रफल बताइए?

बिज्या = समष्ट्रुल की भुजा
बिज्या = 14 cm

$$\begin{aligned}\therefore \text{वृत्त का क्षेत्रफल} &= \pi r^2 \\ &= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \\ &= 44 \times 14 \\ &= 616 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

* वर्ग और वृत्त पर मिश्रित प्रश्न

Q 56 सेमी. बिज्या वाले एक वृत्तीय तार को मोड़कर एक वर्ग बनाया गया तो उस वर्ग की प्रत्येक भुजा बताइए

$\therefore$ वृत्तीय तार को मोड़कर वर्ग बनाया गया है।

अतः वृत्तीय तार की लम्बाई (परिधि)
= वर्ग का तार की लंब (परिमाण)

$$\Rightarrow 2\pi r = 4a$$

$$\Rightarrow \frac{2 \times 22}{7} \times 56 = 4a$$

$$a = 22 \times 4$$

$$a = 88 \text{ cm}$$

$\therefore$ वर्ग की प्रत्येक भुजा = 88 cm

Q एक वर्ग और एक वृत्त का परिमाण समान है। यदि वर्ग का क्षेत्रफल 121 cm^2 है, तो वृत्त का क्षेत्रफल बताइए?

$$\text{एक वर्ग का क्षेत्रफल} = a^2$$

$$121 = a^2$$

$$a = 11 \text{ cm}$$

वर्ग का परिमाण = वृत्त की परिमाण

$$4a = 2\pi r$$

$$4 \times 11 = \frac{2 \times 22}{7} \times r$$

$$44 = \frac{44}{7} \times r$$

$$r = 7 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{वृत्त का क्षेत्रफल} &= \pi r^2 \\ &= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \\ &= 154 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

वर्ग के अंदर बने बड़े से बड़े वृत्त की बिज्या, $r = \frac{\text{वर्ग की भुजा}}{2}$

वर्ग के परिवृत्त की बिज्या, $R = \frac{\text{वर्ग की भुजा}}{2}$

Q एक वर्ग के अन्तः वृत्त और परिवृत्त के क्षेत्रफल का अनुपात बताइए?

$$r^2 : R^2$$

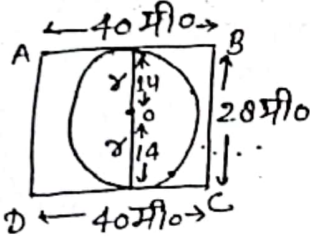
$$\Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 : \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{a}{x} : \frac{2ax}{x}$$

$$= 1 : 2$$

आयत और वृत्त पर मिश्रित प्रश्न =
कार में दान

एक आयत की लम्बाई व चौड़ाई क्रमशः 40 मी० व 28 मी० हैं इस मैदान के अन्दर अधिकतम क्षेत्रफल का वृत्ताकार चबूतरा बनाया गया है तो उस चबूते का क्षेत्रफल बताइये



चबूते की त्रिज्या, 14 मी०

$$\therefore \text{चबूते का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14$$

$$= 44 \times 14$$

$$= 616 \text{ m}^2$$

किसी एक वृत्ताकार तार जिसका परिधि 132 cm है, को मोड़कर एक आयत बनाया गया। यदि आयत की लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात 7:4 हो तो आयत का क्षेत्रफल बताइये?

वृत्ताकार तार की लं० (परिधि) = आयताकार तार की लं० (परिमाप)

$$132 = 2(7x + 4x)$$

$$66 = 7x + 4x$$

$$66 = 11x$$

$$x = 6$$

$$\text{ल०} = 7 \times 6 = 42$$

$$\text{चौ०} = 4 \times 6 = 24$$

$$\therefore \text{आयत का क्षेत्रफल} = l \times b$$

$$= 42 \times 24$$

$$= 1008 \text{ cm}^2$$

एक वृत्ताकार तार की त्रिज्या 14 सेमी० है, को मोड़कर एक आयत बनाया गया। यदि आयत की ल० और चौ० का अनुपात 6:5 हो तो आयत का क्षेत्रफल बताइये?

वृत्ताकार तार की लं० (परिधि) = आयताकार तार की लं० (परिमाप)

$$2\pi r = 2(6x + 5x)$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times 14 = 2(11x)$$

$$44 = 11x$$

$$x = 4$$

$$\therefore \text{आयत की ल०} = 24 \text{ cm}$$

$$\text{चौ०} = 20 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{आयत का क्षेत्रफल} = l \times b$$

$$= 24 \times 20$$

$$= 480 \text{ cm}^2$$

Q किसी आयताकार फर्श की लम्बाई व चौड़ाई क्रमशः 75 मी० व 60 मी० हैं। इस फर्श पर 5 मी० भुजा की वर्गाकार टाइल्स लगायी जानी हैं तो बताइए कुल कितने टाइल्स लगेंगे?

$$\begin{aligned} \text{कुल टाइल्स} &= \frac{\text{फर्श का क्षेत्रफल}}{\text{1 टाइल्स का क्षेत्रफल}} \\ &= \frac{75 \times 60}{5 \times 5} \end{aligned}$$

$$\text{कुल टाइल्स} = 180$$

Q किसी आयताकार फर्श की लम्बाई व चौड़ाई क्रमशः 40 मी० व 28 मी० हैं। इस फर्श पर अधिकतम क्षेत्रफल का वर्गाकार टाइल्स लगायी जानी हैं, तो बताइए कुल कितने टाइल्स लगेंगे?

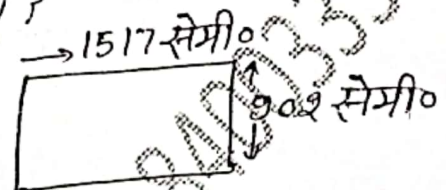
$$\begin{aligned} \text{कुल टाइल्स} &= \frac{\text{फर्श का क्षेत्रफल}}{\text{एक टाइल्स का क्षेत्रफल}} \end{aligned}$$

वर्गाकार Tiles की प्रत्येक

$$\text{भुजा} = 40 \text{ व } 28 \text{ का म०स०} = 4 \text{ मी०}$$

$$\begin{aligned} \text{कुल टाइल्स} &= \frac{40 \times 28}{4 \times 4} \\ &= 70 \text{ टाइल्स Ans} \end{aligned}$$

Q किसी आयताकार फर्श की लम्बाई व चौड़ाई क्रमशः 15 मी० व 17 सेमी० और 9 मी० 2 सेमी० हैं। इस फर्श में अधिकतम क्षेत्रफल का वर्गाकार टाइल्स लगाई जानी हैं तो बताइए इस प्रकार कुल कितने टाइल्स लगेंगे?

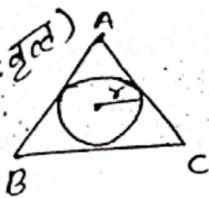


$$\begin{aligned} \text{वर्गाकार टाइल्स की प्रत्येक भुजा} &= 1517 \text{ व } 902 \text{ का म०स०} \\ &= 41 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{कुल टाइल्स} &= \frac{\text{फर्श का क्षेत्रफल}}{\text{1 टाइल्स का क्षेत्रफल}} \\ &= \frac{1517 \times 902}{41 \times 41} \\ &= 814 \text{ टाइल्स} \end{aligned}$$

त्रिभुज और वृत्त पर मिलित प्रश्न =

(अन्तःवृत्त)



(परिवृत्त)

समबाहु Δ के अन्तःवृत्त की त्रिज्या,

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

समबाहु Δ के परिवृत्त की त्रिज्या:

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

किसी समबाहु Δ अन्तःवृत्त का क्षेत्रफल 462 cm^2 है तो परिमाप बताइये?

$$\pi r^2 = 462$$

$$r^2 = \frac{462 \times 7}{22}$$

$$r^2 = 147$$

$$r = \sqrt{3 \times 7 \times 7}$$

$$r = 7\sqrt{3}$$

$$\frac{a}{2\sqrt{3}} = 7\sqrt{3}$$

$$a = 7\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$$

$$a = 7 \times 2 \times 3$$

$$a = 42 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{समबाहु त्रिभुज का परिमाप} &= 3a \\ &= 3 \times 42 \\ &= 126 \text{ cm} \end{aligned}$$

किसी समबाहु Δ की प्रत्येक भुजा 24 cm है, तो इसके अन्तःवृत्त का क्षेत्रफल बताइये?

$$\text{अन्तःवृत्त की त्रिज्या } r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{12}{2\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$r = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$

$$= \pi \times (4\sqrt{3})^2$$

$$= 48\pi \text{ cm}^2$$

किसी समबाहु Δ के अन्तःवृत्त और परिवृत्त में क्षेत्रफल में अनुपात बताइये

अन्तःवृत्त का क्षेत्रफल : परिवृत्त का क्षेत्रफल

$$\pi r^2 : \pi R^2$$

$$= \pi \times \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 : \pi \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \frac{a^2}{12} : \frac{a^2}{3}$$

$$= \frac{1}{4} : 1$$

$$= \frac{1}{4} \times 4 : 1 \times 4 \quad 74$$

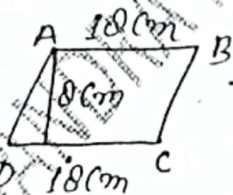
$$= 1 : 4$$

* समान्तर चतुर्भुज (Parallelogram)

- इसकी आगे-सागे की भुजा समान्तर होती हैं।
- इसकी सम्मुख कोणों का योग 180° होता है।
- समान्तर चतुर्भुज के दोनों विकर्ण एक-दूसरे को सम विभाजित करते हैं।

→ समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्र = आधार $\times$ ऊँचाई

Q. किसी समान्तर चतुर्भुज की एक भुजा 18 cm है, यदि इस भुजा से सागे वाली भुजा की लम्बवत दूरी 8 cm हो तो इसका क्षेत्रफल बताइए।



समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्र = आधार $\times$ उँचाई

$$= 18 \times 8$$

$$= 144 \text{ cm}^2$$

Q. किसी समान्तर चतुर्भुज का आधार इसकी उँचाई का 3 गुना है। यदि इसका क्षेत्रफल 108 सेमी^2 हो तो इसका आधार बताइए?

माना, उँचाई = x
आधार = $3x$

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्र = आधार $\times$ उँचाई

$$108 = 3x \times x$$

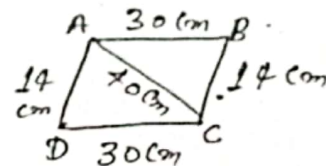
$$3x^2 = 108$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6$$

$\therefore$ आधार = $3x$
 $= 3 \times 6$
 $= 18 \text{ cm}$

Q. किसी समान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ क्रमशः 30 cm व 14 cm हैं। यदि इसके शीर्षों को मिलाने वाली विकर्ण की लम्बाई 40 cm हो तो समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल बताइए?



$\triangle ADC$ में -

$$S = \frac{30 + 14 + 40}{2} = 42 \text{ cm}$$

$\triangle ADC$ का क्षेत्र =

$$= \sqrt{42(42-30)(42-14)(42-40)}$$

$$= \sqrt{42(12)(28)(2)}$$

$$= \sqrt{7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 7 \times 4 \times 2}$$

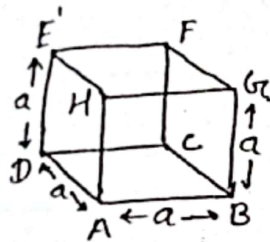
$$= 7 \times 4 \sqrt{3 \times 2 \times 3 \times 2}$$

$$= 7 \times 4 \times 3 \times 2$$

$$= 168 \text{ cm}^2$$

$\therefore$ समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल
 $= 2 \times 168$
 $= 336 \text{ cm}^2$

घन = दृ. वर्गाकार फलकों / सतहों से घिरी हुई आकृति घन कहलाता है। इसकी लम्बाई, चौ. व ऊंचाई बराबर होती है $[l = b = h = a]$



एक घन में होता है -

- (i) 6 सतहें / पृष्ठ / फलक
- (ii) 8 कोने
- (iii) 12 कोरें

Formula =

$$\text{घन का आयतन} = a^2 \times a = a^3$$

घन के सम्पूर्ण पृष्ठ = एक पृष्ठ का क्षेत्रफल का क्षेत्रफल

$$\text{घन का सम्पूर्ण पृष्ठ} = 6a^2$$

$$\text{घन का विकर्ण, } d = \sqrt{3} a$$

Q किसी घन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्र 2400 वर्ग सेमी. है। तो इस घन का आयतन बताइये?

$$\text{घन का सम्पूर्ण पृष्ठ} = 6a^2$$

$$2400 = 6a^2$$

$$a^2 = 400$$

$$a = 20 \text{ सेमी.}$$

$$\text{घन का आयतन} = a^3$$

$$= (20)^3$$

$$= 20 \times 20 \times 20$$

$$= 8000 \text{ सेमी.}^3$$

Q 12 cm कौर वाले एक घन को पिघलाकर तीन घन बनाये गये, यदि दो घनों की प्रत्येक भुजा क्रमशः 6 cm व 8 cm हो तो तीसरे घन की प्रत्येक भुजा बताइये?

बड़े घन का आयतन = तीनों छोटे घनों के आयतनों के योग

$$(12)^3 = (6)^3 + (8)^3 + (x)^3$$

$$1728 = 216 + 512 + x^3$$

$$1728 = 728 + x^3$$

$$x^3 = 1000$$

$$x = 10$$

∴ तीसरे घन का प्रत्येक भुजा = 10 cm

Q किसी बर्तन के आधार की लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 25 cm व 20 cm हैं, अंशतः हव से भरा है। इस बर्तन में 15 cm कोर वाला रूक घन को डुबा दिया जाता है, तो बर्तन के हव स्तर में कितने सेमी की वृद्धि होगी?

बर्तन में बड़े हव का आयतन = घन का आयतन

$$(25 \times 20 \times h) = (15)^3$$

$$h = \frac{15^3}{25 \times 20}$$

$$h = \frac{27}{4}$$

$$h = 6.75 \text{ सेमी. Ans}$$

Q दो घनों के आयतनों का अनुपात 8:27 है तो इनकी भुजाओं का अनुपात बताइए?

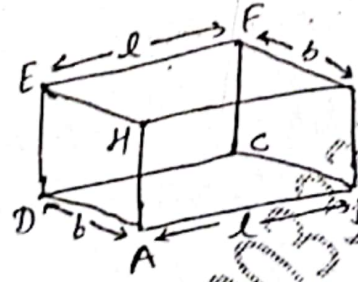
$$\frac{\text{I घन का आयतन}}{\text{II घन का आयतन}} = \frac{8}{27}$$

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}$$

$$a_1 : a_2 = 2 : 3$$

घनाभ (Cuboid) =
ह: आयताकार फलको से घिरी हुई (बन्द) आकृति घनाभ कहलाता है।



घनाभ का आयतन = विभाजित का गुणनफल

$$\text{घनाभ का आयतन} = l b h$$

$$\text{घनाभ के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल} = 2(lb + bh + lh)$$

$$\text{घनाभ का विकर्ण, } d = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$$

$$\text{कमरे के चारों दिवारों का क्षेत्रफल} = 2(l+b) \times h$$

Q किसी बॉक्स की लम्बाई चौड़ाई और ऊँचाई 12 cm, 9 cm व 8 cm हैं, तो इस बॉक्स में रखी जा सकने वाली सबसे बड़ी पेंसिल की लम्बाई क्या होगी?

सबसे बड़ी पेंसिल की लं० = बॉक्स का विकर्ण

$$d = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$$

$$d = \sqrt{(12)^2 + (9)^2 + (8)^2}$$

$$= \sqrt{144 + 81 + 64}$$

$$= \sqrt{289}$$

$$= 17 \text{ cm Ans.}$$

Q किसी घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई का अनुपात 2:3:4 है। यदि इसका आयतन 3000 cm^3 हो तो इसके सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल बताइये?

माना घनाभ की लं० = $2x$
 चौ० = $3x$
 ऊँचाई = $4x$

$\therefore$ घनाभ का आयतन = $l \times b \times h$

$$3000 = 2x \times 3x \times 4x$$

$$\frac{3000}{24} = x^3$$

$$125 = x^3$$

$$x^3 = 125 \Rightarrow x = 5$$

$$\text{लं०} = 2 \times 5 = 10 \text{ cm}$$

$$\text{चौ०} = 5 \times 3 = 15 \text{ cm}$$

$$30 = 5 \times 4 = 20 \text{ cm}$$

$\therefore$ सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल

$$= 2(lb + bh + lh)$$

$$= 2(10 \times 15 + 15 \times 20 + 10 \times 20)$$

$$= 1300 \text{ cm}^2$$

Q किसी घनाभ के विकर्ण का माप 28 cm तथा इसके तीनों विमाओं का योग 44 cm है तो घनाभ के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल बताइये?

$$28 = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2} \quad (i)$$

$$l + b + h = 44 \text{ cm} \quad (ii)$$

समी० (i) से -

$$(28)^2 = (l^2 + b^2 + h^2)$$

$$784 = l^2 + b^2 + h^2$$

अब समी० (ii) से -

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर -

$$(l + b + h)^2 = (44)^2$$

$$l^2 + b^2 + h^2 + 2lb + 2bh + 2lh = 1936$$

$$784 + 2(lb + bh + lh) = 1936$$

$$2(lb + bh + lh) = 1936 - 784$$

$$2(lb + bh + lh) = 1152$$

$$\text{क्षेत्रफल} = 1152 \text{ cm}^2 \text{ Ans}$$

Q किसी घनाभ के तीनों संलग्न पृष्ठों का क्षेत्रफल क्रमशः a , b व c है तो इसका आयतन बताइये?

$$lb = a \quad (i)$$

$$bh = b \quad (ii)$$

$$lh = c \quad (iii)$$

गुणा करने पर

$$l^2 \cdot b^2 \cdot h^2 = abc$$

$$\text{या } (lbh)^2 = abc$$

$$\therefore lbh = \sqrt{abc}$$

$$76$$

बेलन (Cylinder) =

किसी आयताकार कागज को इसके लम्बाई और चौड़ाई के अनुदिश मोड़ने पर (बिना दोहराव) में प्राप्त ठोस बेलन कहलाता है।

* बेलन का वक्रपृष्ठ = आधार का परिमाप $\times$ ऊँचाई

$$= 2\pi r \times h$$

$$\boxed{\text{बेलन का वक्रपृष्ठ} = 2\pi r h}$$

* बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ = वक्रपृष्ठ + दोनों सिरों का क्षेत्र

$$= 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$\boxed{\text{बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ} = 2\pi r (h + r)}$$

* बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्र $\times$ ऊँचाई

$$= \pi r^2 \times h$$

$$\boxed{\text{बेलन का आयतन} = \pi r^2 h}$$

७ एक बेलन के आधार का व्यास 42 cm तथा इसके वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल 1320 cm² है तो इसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

$$\text{बेलन का त्रिज्या} = 21 \text{ cm}$$

$$\text{वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल} = 2\pi r h$$

$$2\pi r h = 1320$$

$$\frac{2 \times 22 \times 21 \times h}{7} = 1320$$

$$h = 10 \text{ cm}$$

७ किसी बेलन की त्रिज्या और ऊँचाई का योग 37 cm तथा इसके सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल 1628 cm² है तो इसका आयतन बताइये?

$$r + h = 37 \quad \text{--- (i)}$$

$$\text{सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल} = 2\pi r (h + r)$$

$$\Rightarrow 2\pi r (h + r) = 1628$$

$$\Rightarrow 2\pi r (37) = 1628$$

$$\Rightarrow 2 \times 22 \times r \times 37 = 1628$$

$$r = \frac{1628 \times 7}{2 \times 22 \times 37}$$

$$r = 7$$

$$\therefore h = 30$$

$$\begin{aligned} \text{बेलन का आयतन} &= \pi r^2 h \\ &= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 30 \\ &= 22 \times 210 \\ &= 4620 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

७ एक आयताकार कागज की लम्बाई व चौड़ाई क्रमशः 88 cm व 30 cm है। इस कागज को इसके लम्बाई के अनुदिश मोड़कर एक बेलन बनाया गया है, तो इसका आयतन बताइये?

आधार का परिमाण, $2\pi r =$ कागज की लं०
 $= 88$

$$2\pi r = 88$$

$$r = \frac{88 \times 7}{2 \times 22}$$

$$r = 14 \text{ cm}$$

∴ वेलन की ऊँचाई, $h =$ कागज की चौ०
 $= 30 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} \therefore \text{आयतन} &= \pi r^2 h \\ &= \frac{22}{7} \times 14^2 \times 30 \\ &= 18480 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

∴ किसी वेलन की विज्या व ऊँचाई का अनुपात $2:3$ है। यदि इसका आयतन 12936 cm^3 हो तो सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल बताइए?

$$\text{विज्या} = 2x$$

$$\text{ऊँचाई} = 3x$$

$$\text{वेलन का आयतन} = \pi r^2 h$$

$$12936 = \frac{22}{7} \times 2x \times 2x \times 3x$$

$$x^3 = \frac{12936 \times 7}{12 \times 22}$$

$$x = \sqrt[3]{49 \times 7}$$

$$x = \sqrt[3]{7 \times 7 \times 7}$$

$$x = 7 \text{ cm}$$

$$\text{विज्या} = 14$$

$$r = 7$$

∴ वेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ

$$\begin{aligned} &= 2\pi r (r + h) \\ &= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 (7 + 30) \\ &= 2 \times 22 \times 37 \\ &= 1628 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

∴ दो वेलन के आयतन समान हैं, यदि इनकी विज्याओं का अनुपात $2:3$ हो तो इनकी ऊँचाईयों का अनुपात बताइए?

I वेलन का आयतन = II वेलन का आयतन

$$\pi r_1^2 h_1 = \pi r_2^2 h_2$$

$$(2)^2 h_1 = (3)^2 h_2$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{9}{4}$$

$$h_1 : h_2 = 9 : 4$$

∴ एक वेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्र 264 cm^2 तथा आयतन 924 cm^3 है, तो इस वेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए?

$$2\pi r h = 264 \text{ --- (i)}$$

$$\pi r^2 h = 924 \text{ --- (ii)}$$

समी० (ii) ÷ (i) से -

$$\frac{\pi r^2 h}{2\pi r h} = \frac{924}{264} \Rightarrow 132r = 924$$

$$r = \frac{924}{132}$$

$$r = 7 \text{ cm}$$

र का मान समी० (i) में रखने पर -

$$\Rightarrow 2 \times \frac{22}{7} \times r \times h = 264$$

शंकु (cone) =

$$h = 6 \text{ cm} \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$



त्रिभुज के, $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

शंकु का वक्रपृष्ठ = $\pi r l$

सम्पूर्ण पृष्ठ = वक्रपृष्ठ + आधार का क्षेत्रफल
 $= \pi r l + \pi r^2$

सम्पूर्ण पृष्ठ = $\pi r (l + r)$

शंकु का आयतन = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

Q किसी शंकु के आधार का व्यास 14 cm तथा वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल 550 cm² है, तो इस शंकु का आयतन बताइये?

त्रिज्या $r = 7 \text{ cm}$

वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल = $\pi r l$

$\pi r l = 550$

$\frac{22}{7} \times 7 \times \sqrt{h^2 + 7^2} = 550$

$\sqrt{h^2 + 7^2} = 25$

$(\sqrt{h^2 + (7)^2})^2 = (25)^2$

$h^2 + 7^2 = 625$

$h^2 = 625 - 49$

$h^2 = 576$

$h = 24$

आयतन = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$

$= 22 \times 7 \times 8$

$= 22 \times 56$

$= 1232 \text{ cm}^3$

Q किसी शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई का अनुपात 3:4 है। यदि इसका आयतन $96 \pi \text{ cm}^3$ हो तो इसकी त्रिज्या ऊ(1) बताइये?

त्रिज्या = $3x$

ऊँचाई = $4x$

आयतन = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

$96\pi = \frac{1}{3} \pi \times 3x \times 3x \times 4x$

$x^3 = \frac{96 \times 3}{3 \times 4}$

$x^3 = 8$

$x = 2$

$\therefore$ त्रिज्या = 6, ऊँ = 8

$\therefore l = \sqrt{6^2 + 8^2}$

$= \sqrt{36 + 64}$

$= \sqrt{100}$

$\therefore \underline{\underline{l = 10}}$

Ans

किसी शंकवाकार पहाड़ी की तिर्यक ऊँचाई 2.5 मी० तथा आधार का क्षेत्र 1.54 मी०² है तो इस पहाड़ी की ऊँचाई बताइये?

$$\pi r^2 = 1.54$$

$$r^2 = \frac{1.54 \times 7}{22}$$

$$r^2 = 0.49$$

$$r = 0.7 \text{ मी०}$$

$$\text{तिर्यक ऊँ०} = 2.5 \text{ मी०}$$

$$l^2 = r^2 + h^2$$

$$h^2 = l^2 - r^2$$

$$h^2 = (2.5)^2 - (0.7)^2$$

$$h^2 = 6.25 - 0.49$$

$$h^2 = 5.76$$

$$h = 2.4 \text{ Ans}$$

किसी शंकवाकार टेन्ट के आधार की विज्या 7 मी० व ऊँचाई 24 मी० है, तो इस टेन्ट के निर्माण में 5 मी० चौड़ा कितने मी० लम्बे कपड़े की आवश्यकता होगी?

टेन्ट के निर्माण में लगे कपड़े का क्षेत्र

$$= \text{वक्र पृष्ठ} = \pi r l$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times \sqrt{(24)^2 + (7)^2}$$

$$= 22 \times \sqrt{576 + 49}$$

$$= 22 \times \sqrt{625}$$

$$= 22 \times 25$$

$$= 550 \text{ मी०}$$

$$\text{कपड़े का क्षेत्र} = 550$$

$$1 \times b = 550$$

$$1 \times 5 = 550$$

$$1 = 110 \text{ मी०}$$

$$\text{ल०} = 110 \text{ मी०}$$

दो शंकु की विज्याओं का अनुपात 2:3 तथा ऊँचाईयों का अनुपात 5:4 है। तो इनके आयतनों का अनुपात बताइये?

$$\frac{\text{I का आयतन}}{\text{II का आयतन}} = \frac{\frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3} \pi r_2^2 h_2}$$

$$= \frac{(2)^2 \times 5}{(3)^2 \times 4}$$

$$= \frac{2^2 \times 5}{3^2 \times 4}$$

$$\frac{\text{I का आयतन}}{\text{II का आयतन}} = \frac{4 \times 5}{9 \times 4}$$

$$= \frac{5}{9}$$

$$\frac{\text{I का आयतन}}{\text{II का आयतन}} = \frac{5}{9}$$

$$\text{II का आयतन}$$

गोला (Sphere) -

$$\text{गोले का आयतन} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{अर्द्धगोले का आयतन} = \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$\text{गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 4 \pi r^2$$

$$\text{अर्द्धगोले का वक्रपृष्ठ} = 2 \pi r^2$$

$$\text{अर्द्धगोले का सम्पूर्णपृष्ठ} = 3 \pi r^2$$

Q. किसी गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 5544 cm^2 है, तो इसका आयतन बताइए?

$$4 \pi r^2 = 5544$$

$$4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 5544$$

$$r^2 = \frac{5544 \times 7}{4 \times 22}$$

$$r^2 = 441$$

$$r = 21 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{आयतन} &= \frac{4}{3} \pi r^3 \\ &= \frac{4 \times 22}{3} \times 21 \times 21 \times 21 \\ &= 38808 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Q. 10 cm त्रिज्या वाले एक ठोस गोले को पिघलाकर करार त्रिज्या के 8 छोटे-2 गोले बनाये जाते हैं, तो प्रत्येक गोले की त्रिज्या बताइए?

$$\text{बड़े गोले का आयतन} = 8 \text{ छोटे गोले के आयतनों का योग}$$

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \times 8$$

$$\frac{4}{3} \pi \times (10)^3 = \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \times 8$$

$$1000 = r^3 \times 8$$

$$r^3 = \frac{1000}{8}$$

$$r^3 = 125$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

Q. 1 cm , 2 cm व 3 cm त्रिज्या वाले ठोस गोले को पिघलाकर एक बड़ा गोला बनाया जाता है। यदि इस प्रक्रिया में 25% धातु नष्ट हुई तो बड़े गोले की त्रिज्या बताइए?

$$\begin{aligned} \text{तीनों गोले के आयतनों का योग} &\times \frac{75}{100} \\ &= \text{बड़े गोले का आयतन} \end{aligned}$$

$$\frac{4}{3} \pi \left[(1)^3 + (2)^3 + (3)^3 \right] \times \frac{3}{4} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$[1 + 8 + 27] \times \frac{3}{4} = r^3$$

$$36 \times \frac{3}{4} = r^3$$

$$\Rightarrow r^3 = 27$$

$$r = 3$$

किसी गोले की त्रिज्या 2 cm बढ़ा दी से इसके पृष्ठीय क्षेत्र में 352 cm² की वृद्धि हो जाती है, तो गोले की प्रारम्भिक त्रिज्या बताइये।
 गोले का पृष्ठीय क्षेत्र = गोले का पृष्ठीय क्षेत्र
 = 352

$$4\pi (r+2)^2 - 4\pi (r)^2 = 352$$

$$4\pi [(r+2)^2 - r^2] = 352$$

$$4\pi [r^2 + 4 + 4r - r^2] = 352$$

$$4\pi [4 + 4r] = 352$$

$$(4 + 4r) = \frac{352 \times 7}{4 \times 22}$$

$$4 + 4r = 28$$

$$4r = 24$$

$$r = 6 \text{ cm}$$

गोले का प्रारम्भिक त्रिज्या = 6 cm

गोले और बेलन पर मिश्रित प्रश्न =

3. 3 cm त्रिज्या के धातु के एक ठोस गोले को पिघलाकर 0.1 cm त्रिज्या का एक तार बनाया जाता है, तो उस तार की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

गोले का आयतन = तार (बेलन) का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi (3)^3 = \pi (0.1)^2 \times h$$

$$\frac{4}{3}\pi (3)^3 = \pi \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times h$$

$$\frac{4}{3} \times 3 \times 3 \times 3 = \frac{1}{10 \times 10} \times h$$

$$h = 4 \times 3 \times 3 \times 100$$

$$h = 36 \times 100$$

$$\Rightarrow h = 3600 \text{ cm}$$

4. एक गोले और एक बेलन की त्रिज्या और सम्पूर्ण पृष्ठ समान है तो इनके ऊँचाईयों का अनुपात बताइये।

माना, दोनों की त्रिज्या 'r' है।

गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ = बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ

$$4\pi r^2 = 2\pi r (h + r)$$

$$2r = h + r$$

$$h = r$$

79

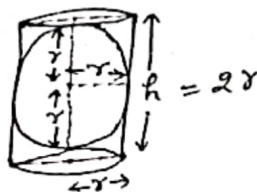
गोले की ऊँचाई : बेलन की ऊँचाई

$$= 24 : h$$

$$= 24 : 48$$

$$= \boxed{2 : 1} \text{ Ans}$$

के आयतन
 एक गोले और उसके परिगत बेलन
 के आयतन का अनुपात क्या होगा?



यहाँ, गोले व बेलन दोनों की त्रिज्या r है।

बेलन की ऊँचाई, $h = 2r$

∴ गोले का आयतन : परिगत बेलन का आयतन

$$\frac{4\pi r^3}{3} : \pi r^2 h$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3 : \pi r^2 (2r) [\because h = 2r]$$

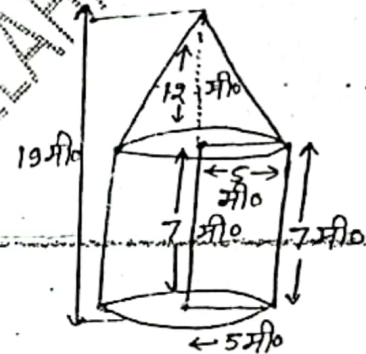
$$= \frac{4}{3} : 2$$

$$= \frac{2}{3} \times 3 : 1 \times 3$$

$$= \boxed{2 : 3} \text{ Ans}$$

शंकु और बेलन पर मिलित प्रश्न-

एक सर्कस का टेन्ट नीचे से बेलनाकार और ऊपर से शंकुवाकार है। यदि इसके आधार की त्रिज्या 5 मी० हो तथा बेलनाकार भाग की ऊँचाई 7 मी० और पूरे टेन्ट की ऊँचाई 19 मी० हो तो इस टेन्ट के निर्माण में लगे कपड़े का क्षेत्रफल बताइए?



बेलनाकार भाग में लगे कपड़े का क्षेत्रफल =

$$= 2\pi r h$$

$$= 2\pi \times 5 \times 7$$

$$= 70\pi \text{ मी}^2$$

शंकुवाकार भाग में लगे कपड़े का क्षेत्रफल =

$$= \pi r l$$

$$= \pi \times 5 \times \sqrt{2^2 + 12^2}$$

$$= \pi \times 5 \times \sqrt{4 + 144}$$

$$= \pi \times 5 \times 13 = 65\pi \text{ मी}^2$$

$$\text{कुल कपड़े का क्षेत्रफल} = (70\pi + 65\pi) \\ = 135\pi \text{ मी}^2$$

किसी शंक्वाकार वर्तन के आधार की त्रिज्या 12 cm व ऊँचाई 50 cm है, पूर्णतः हव से भरा है। इस हव को एक बेलनाकार ^{वर्तन} जिसके आधार की त्रिज्या 10 cm है, में पलट दिया जाता है, तो इस वर्तन में हव की गहराई बताइये?

शंक्वाकार वर्तन में हव का आयतन = बेलनाकार वर्तन में हव का आयतन

$$\frac{1}{3} \pi \times (12)^2 \times 50 = \frac{1}{3} \pi \times (10)^2 \times h$$

$$\frac{1}{3} \times 12 \times 12 \times 50 = 100 \times h$$

$$h = 24 \text{ cm}$$

एक बेलन व एक शंकु का आयतन समान है, यदि इनकी त्रिज्याओं का अनुपात 4:5 हो तो इनकी ऊँचाइयों का अनुपात बताइये?

शंकु और गोले पर मिलित प्रश्न =

Q 3 cm त्रिज्या और 4 cm ऊँचाई के ऐसे कितने शंकु पिघलाए जाए कि 6 cm त्रिज्या का एक बड़ा गोला बनाया जा सके?

माना, ऐसे n शंकु पिघलाए जायें
 $\therefore n$ शंकु का आयतन = गोले का आयतन

$$n \left(\frac{1}{3} \pi r^2 h \right) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$n [3 \times 3 \times 4] = 4 \times 6 \times 6$$

$$n = \frac{4 \times 2 \times 6 \times 6}{3 \times 4}$$

$$n = 24$$

Q 10.5 cm त्रिज्या के एक ठोस गोले को पिघलाकर 3.5 cm त्रिज्या और 3 cm ऊँचाई के कुछ शंकु बनाये गये। तो ऐसे शंकुओं की संख्या बताइये? माना, ऐसे n शंकु बनेंगे।

∴ गोले का आयतन = n शंकु का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = n \left[\frac{1}{3}\pi r^2 h \right]$$

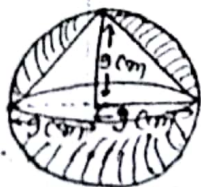
$$4r^3 = n[r^2 h]$$

$$4 \times 10.5 \times 10.5 \times 10.5 = n[3.5 \times 3.5 \times 3]$$

$$n = \frac{4 \times 10.5^3 \times 10.5}{3.5 \times 3.5 \times 3}$$

$$n = 126 \text{ Ans}$$

Q 9 सेमी. त्रिज्या के लकड़ी के एक ठोस गोले से 9 cm त्रिज्या और 9 cm ऊँचाई का एक ठोस शंकु काटकर निकाल लिया जाता है। तो इस प्रक्रिया में नष्ट हुई लकड़ी का % बताइये?



$$\text{गोले का आयतन} = \frac{4}{3}\pi \times 9 \times 9 \times 9$$

$$= 972\pi \text{ सेमी}^3$$

$$\text{शंकु का आयतन} = \frac{1}{3}\pi \times 9^2 \times 9$$

$$= 243\pi \text{ सेमी}^3$$

$$\text{नष्ट लकड़ी का आयतन} = 972\pi - 243\pi$$

$$= 729\pi$$

$$\therefore \text{नष्ट लकड़ी का \%} = \frac{729\pi}{972\pi} \times 100$$

$$= \frac{729}{972} \times 100$$

$$= \frac{108}{12} \times 100$$

$$= 75\% \text{ Ans}$$

General Statistics (सांख्यिकी)

→ सांख्यिकी शब्द का प्रयोग सर्वप्रथम 1743 ई० में गॉटफ्राइड एकेनवॉल (Gottfried Achenwall) ने किया। इन्हें ही सांख्यिकी का जनक कहा जाता है।

→ Statistics 'अंग्रेजी' शब्द है। इसका उद्गम लैटिन शब्द के *Statum* तथा इटैलियन शब्द के '*Statista*' से हुआ है। इन सभी का अर्थ राज्य (State) से है।

→ प्राचीन काल में सांख्यिकी को राजाओं का विज्ञान (*Science of Kings*) कहा जाता था।

परन्तु, आज सांख्यिकी का अर्थ व्यापक हो चुका है। इसे विभिन्न कलाओं का कला और विज्ञानों का विज्ञान कहा जाता है।

→ व्यावहारिक जीवन और ज्ञान विज्ञान की सभी शाखाओं में इसका प्रयोग किया जाता है।

Ex - बढ़ती हुई जनसंख्या, बेरोजगारी दर, जन-मृत्यु दर,

निर्धनता आदि में सांख्यिकी का प्रयोग सर्वाधिक होता है।

'अर्थ और परिभाषा' (Meaning and Definition) =

बहुवचन में

(व्यक्तिगत इकाई के समूह से सम्बन्धित संख्यात्मक तथ्य)

* बहुवचन में सांख्यिकी का अर्थ आँकड़ों / समूहों (data) से है, जो किसी क्षेत्र से सम्बन्धित संख्यात्मक विवरण होते हैं।

Ex - जनसंख्या, जन-मृत्यु दर, निर्धनता, बेरोजगारी दर आदि।

एकवचन

(आँकड़ों के संग्रहण, विश्लेषण एवं निर्वचन में)

* एकवचन में सांख्यिकी का अर्थ 'विज्ञान' से है। इसमें तथ्यों के संग्रहण, विश्लेषण एवं निर्वचन से सम्बन्धित क्रियाओं का अर्थात् सांख्यिकी विविधों का विधिवत अध्ययन किया जाता है।

आँकड़ा / समूह (data) =

किसी निश्चित उद्देश्य से एकत्रित किये गये तथ्यों / संख्याओं को आँकड़ा कहते हैं।

Note = आँकड़ा सुस्पष्ट होना चाहिए।

Ex - भूकम्प के दौरान 175 लोगों की मृत्यु हुई, यह आँकड़ा है, परन्तु भूकम्प के दौरान सैकड़ों लोगों की मृत्यु हुई यह आँकड़ा नहीं है।

सांख्यिकी से सम्बन्धित महत्वपूर्ण शब्दावली =

बारम्बारता (Frequency)

आँकड़ों के संग्रहण करते समय कोई आँकड़ा जितनी बार आता है। इसे उसे बारम्बारता कहते हैं।

संचयी बारम्बारता = (Cumulative Frequency)

किसी वर्ग-अन्तराल की संचयी बारम्बारता उस वर्ग-अन्तराल की बारम्बारता और इसके ठीक पहले जितने वर्ग-अन्तराल होते हैं, उन सभी के बारम्बारताओं के योग को संचयी बारम्बारता कहते हैं।

वर्ग-अन्तराल = (Class-Interval)

जब आँकड़ों को समूहों या वर्गों में बाँटा जाता है, तो इसे वर्ग-अन्तराल कहते हैं। यह दो प्रकार का होता है। इसे हम सतत श्रेणी भी कहते हैं।

1. समावेशिक विधि (Inclusive method)

समावेशिक विधि में वर्ग-अन्तराल इस प्रकार होते हैं कि पहला वर्ग-अन्तराल जिस अंक पर समाप्त होता है, उसके अगले अंक से दूसरा वर्ग-अन्तराल शुरू होता है।

Ex - 0-9, 10-19, 20-29, 30-39, -----

L.L - Lower limit

U.L - Upper limit

2. अपवर्जी विधि (Exclusive method)

अपवर्जी विधि में वर्ग-अन्तराल इस प्रकार होता है कि पहला वर्ग-अन्तराल जिस अंक पर समाप्त होता है, ठीक उसी अंक से दूसरा वर्ग-अन्तराल शुरू होता है।

Ex - 0-10, 10-20, 20-30 30-40, -----

Note = अपवर्जी विधि के कार्य-
अंतराल में ऊपरी सीमा
दो दी जाती है।

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप =
measurement of Central
Tendency =

1. माध्य (mean)
2. माध्यिका (median)
3. बहुलक (mode)

1. माध्य = यह केन्द्रीय प्रवृत्ति का
अंकगणितीय माप होता है।

2. माध्यिका = यह केन्द्रीय प्रवृत्ति
का स्थिति माप होता है।

3. बहुलक = यह भी केन्द्रीय प्रवृत्ति
का स्थिति माप होता है।

समान्तर माध्य / औसत =

(i) व्यक्तिगत श्रेणी में माध्य ज्ञात
करना।

(ii) व्यक्तिगत श्रेणी में माध्य ज्ञात
करना।

(iii) समान्तर श्रेणी में माध्य ज्ञात करना।

(i) व्यक्तिगत श्रेणी का माध्य ज्ञात करना -
सभी सजातीय पदों के योग को पदों
की संख्या से भाग देने पर जो
भागफल प्राप्त होता है, उसे समान्तर
माध्य कहते हैं।

⇒ यदि अंकड़ों $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ हैं

$$\text{तो, माध्य} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

$$\text{या, } \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

जहाँ $\sum \rightarrow$ Sum total (योग)

$x \rightarrow$ चर

$n \rightarrow$ कुल पद

एक विद्यार्थी के 5 विषयों का माध्य
72 है। यदि उसके पाँचों विषय में
प्राप्त अंक क्रमशः 68, 82, x , 75
और 55 हो x का मान बताइये?

$$\text{माध्य} = \frac{\sum x}{n}$$

$$72 = \frac{68 + 82 + x + 75 + 55}{5}$$

$$\Rightarrow 360 = 180 + x + 130$$

$$x = 360 - 180 - 130$$

$$x = 80$$

82

Q पाँच प्रेक्षणों $x, (x+2), (x+4), (x+6)$ व $(x+8)$ के माध्य 11 है, तो प्रथम 3 प्रेक्षणों का माध्य बताइये।

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$11 = \frac{x + x + 2 + x + 4 + x + 6 + x + 8}{5}$$

$$55 = 5x + 20$$

$$5x = 35$$

$$x = 7$$

$$\text{तब } x+2 = 7+2 = 9$$

$$\text{स्व } (x+4) = 7+4 = 11$$

$\therefore$ प्रथम तीन प्रेक्षणों का माध्य

$$\bar{x} = \frac{7 + 9 + 11}{3}$$

$$= \frac{27}{3}$$

$$\bar{x} = 9 \text{ Ans}$$

खण्डित श्रेणी का माध्य ज्ञात करना =

यदि श्रेणी खण्डित है तो प्रत्येक प्रेक्षण की बारम्बारता को प्रेक्षण के मान से गुणा करके प्राप्त गुणनफल में बारम्बारताओं की कुल संख्या से भाग देते हैं।

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

जहाँ $f \rightarrow$ भाग

$f \rightarrow$ बारम्बारता

$x \rightarrow$ चर (मान)

Q किसी कक्षा के 50 विद्यार्थियों का भार निम्न है।

T.N of student	12	7	18	8	5
भार (kg में) x	45	30	40	35	50

तो इन सभी के भार का माध्य बताइये।

विद्यार्थी (f)	भार (x)	$f \times x$
12	45	540
7	30	210
18	40	720
8	35	280
5	50	250
$\sum f = 50$		$\sum fx = 1000$

$$\therefore \bar{x} = \frac{2000}{50} = 40 \text{ Kg}$$

संख्याओं 3, 5, 7 व 9 की बारम्बारता क्रमशः $(x-2)$, $(x+2)$, $(x-3)$ व $(x+3)$ है। यदि इनका समान्तर माध्य 6.5 है तो $x = ?$

सं०(x)	बारम्बारता f	f x x
3	$(x-2)$	$3x-6$
5	$(x+2)$	$5x+10$
7	$(x-3)$	$7x-21$
9	$(x+3)$	$9x+27$
$\Sigma f = 4x$		$\Sigma fx = 24x+10$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

$$6.5 = \frac{24x+10}{4x}$$

$$26x = 24x+10$$

$$2x = 10$$

$$\boxed{x = 5} \text{ Ans}$$

(iii) सतत श्रेणी का माध्य ज्ञात करना =

जब प्रश्न में वर्ग-अन्तराल व बारम्बारता दिया हो तो यह सतत श्रेणी में आता है।

Step-1 - सर्वप्रथम प्रत्येक वर्ग अन्तराल का मध्यमान (m) ज्ञात करें।

$$m = \frac{L.L + U.L}{2}$$

जहाँ = L.L = Lower limit
U.L = Upper limit

Step-2 = मध्यमान (m) का बारम्बारता (f) के साथ गुणा करें।

$$\text{Step-3} = \bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

Q निम्न आँकड़ों का समान्तर माध्य ज्ञात करें।

C.I	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
F	5	8	12	15	6	4

C.I	मध्यमान (m)	f	Fxm
0-10	5	5	25
10-20	15	8	120
20-30	25	12	300
30-40	35	15	525
40-50	45	6	270
50-60	55	4	220
		50	1460

$$\bar{x} = \frac{\sum fm}{\sum f}$$

$$= \frac{1460}{50}$$

$$= 29.2 \text{ Ans}$$

माध्यिका = (Median)

- * माध्यिका वितरण को दो समान भागों में बाँटता है। पहले भाग का मान, माध्यिका मान के बराबर या उससे कम होता है तथा दूसरे भाग का मान माध्यिका मान के बराबर या उससे अधिक होता है।
- * दिए गए आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में रखने के बाद वह पद जिसके ठीक पहले बितने पद हो उसके ठीक बाद में भी

उत्तरे ही पद हो, आँकड़ों का माध्यिका कहलाता है।

* माध्यिका केंद्रीय प्रवृत्ति का स्थिति माप होता है।

* इसका प्रयोग गुणात्मक सम्बन्धों को दिखाने में किया जाता है जैसे - ईमानदारी, सुन्दरता आदि।

* माध्यिका का बीजीय विवेचन सम्भव नहीं होता है।

* माध्यिका चरम मूल्य (extreme) Value से प्रभावित नहीं होता।

माध्यिका तीन प्रकार का होता है।

(i) व्यक्तिगत श्रेणी का माध्यिका ज्ञात करना।

Q आकड़े 24, 18, 5, 10, 39, 27, 30, 46, 63, 15 व 40 की माध्यिका बताइए?

आरोही क्रम - में रखने पर =

5, 10, 15, 18, 24, 27, 30, 39, 40, 46, 63

माध्यिका = 27

Q. आँकड़ें 18, 7, 35, 12, 46, 9, 30, 25, 54, 43, 13 व 50 की माध्यिका बताइए?

आरोही क्रम में रखने पर =

7, 9, 12, 13, 18, 25, 30, 35

43, 46, 50, 54

$$\therefore \text{माध्यिका} = \frac{25 + 30}{2}$$

$$= \frac{55}{2} = 27.5$$

Ans

Q. किसी परीक्षा में 10 छात्रों के विषयों 3 छात्र फेल हो गये, यदि शेष छात्रों के प्राप्तांक क्रमशः 63, 45, 54, 39, 62, 40 और 50 हों तो इन सभी के प्राप्तांकों की माध्यिका बताइए?

आरोही क्रम में रखने पर -

$x_1, x_2, x_3, 39, 40, 45, 50, 54, 62, 63$

$$\therefore \text{माध्यिका} = \frac{40 + 45}{2}$$

$$= \frac{85}{2}$$

$$= 42.5 \text{ Ans}$$

Q. 12 प्रेक्षणों को आरोही क्रम में सजाकर रखा गया है. यदि 6 वें और 7 वें प्रेक्षण का मान क्रमशः 28 व 34 हो तो पूरे आँकड़ों की माध्यिका बताइए?

$$\frac{6\text{ वें प्रेक्षण का मान} + 7\text{ वें प्रेक्षण का मान}}{2}$$

2

$$= \frac{28 + 34}{2}$$

2

$$= \frac{62}{2} = 31$$

Note- यदि आँकड़ों को आरोही/उत्पन्न आरोही क्रम में रखकर इसके दोनों दोरों से चरम मान हटा दिया जाय तो माध्यिका प्रभावित नहीं होती।

Q. किसी आँकड़ों को आरोही क्रम में रखकर इसके दोनों दोरों से चरम मान हटा दिया जाय तो मध्य में से क्या प्रभावित होगा?

(a) माध्य और माध्यक

(b) माध्य, माध्यक और बहुलक

(c) बहुलक और माध्यक

(d) माध्य और बहुलक

(ii) माध्यिका श्रेणी की माध्यिका ज्ञात करना -

जब प्रश्न में बारम्बारता दिया गया हो
ऐसी श्रेणी माध्यिका श्रेणी के अन्तर्गत
आता है।

सामान्य नियम =

Step-1 = सर्वप्रथम संचयी बारम्बारता
ज्ञात करे।

Step-2 = बारम्बारताओं का योग (Σf),
ज्ञात करे। इसी को कुल पद (n)
कहते हैं। $\Sigma f = n$

Step-3 = माध्यिका = $\frac{n}{2}$ संचयी

बारम्बारता का संगत चर

Q. आँकड़ों की माध्यिका बताइये?

चर	10	7	11	5	8	6	9
बारम्बारता	6	8	15	12	4	7	16

Solⁿ

चर (x)	बारम्बारता (f)	संचयी बारम्बारता (C.F.)
10	6	6
7	8	$8+6=14$
11	15	$14+15=29$
5	12	$29+12=41$
8	4	$41+4=45$
6	7	$45+7=52$
9	16	$52+16=68$

$$\Sigma f = n = 68$$

$$\text{माध्यिका} = \frac{68}{2}$$

$$= 34$$

बारम्बारता का संगत चर = 5

अतः माध्यिका = 5

(iii) सतत श्रेणी का माध्यिका ज्ञात करना =

जब प्रश्न में वर्ग-अन्तराल (C.I.)
और बारम्बारता दिया हो, तो
यह सतत श्रेणी का माध्यिका कहलाता
है।

$$\text{माध्यिका} = l_1 + \frac{i}{f} (n - c)$$

l_1 = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा

i = माध्यिका वर्ग-अन्तराल
का Interval

f = माध्यिका वर्ग की बारम्बारता

$$n = \frac{n}{2}$$

c = माध्यिका वर्ग के ठीक पहले
वर्ग-अन्तराल की
संचयी बारम्बारता

	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
आवृत्ति	20	10	35	15	30

की माध्यिका बताइए?

CJ	F	C.F.:
0-10	20	20
10-20	10	30 = C
20-30	35	65
30-40	15	80
40-50	30	110
ΣF = 110		

$$m = \frac{n}{2} = \frac{110}{2}$$

$m = 55$ (संचयी बारम्बात)
का संगत च

$$l = 20 \quad i = 10$$

$$F = 35 \quad m = 55$$

$$C = 30$$

$$\text{माध्यिका} = 20 + \frac{10^2}{357} (55 - 30)$$

$$= 20 + \frac{2}{7} (25)$$

$$= 20 + \frac{50}{7}$$

बहुलक (Mode) =

दिए गए आँकड़ों में जिस एक की आवृत्ति सर्वाधिक जाए हो, आँकड़ों का बहुलक कहलाता है।

→ बहुलक शब्द फ्रेंच शब्द के

"La-Mode" से लिया गया है:

जिसका अर्थ "Fashionable" होता है।

→ इसका प्रयोग व्यापारिक क्षेत्र में किसी वस्तु की लोक प्रियता दिखाने में किया जाता है।

→ इसका प्रयोग पूर्वानुमान या भविष्यवाणी में भी किया जाता है।

→ बहुलक अपने चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होता। अर्थात् इसका वीजीय विवेचन सम्भव नहीं है, अर्थात् इसका मान आनिश्चित होता है।

→ बहुलक केन्द्रीय प्रवृत्ति का स्थिति माप होता है।

→ बहुलक ज्ञात करने की सर्वोत्तम विधि निरीक्षण विधि है।

85

व्यापित श्रेणी का बहुलक ज्ञात करना =

Q. आँकड़ें 7, 11, 13, 13, 15, 7, 8, 5, 3, 7
9, 4, 6, 18, 7, 15 और 13
का बहुलक बताइए?

∴ 7 की आवृत्ति सर्वाधिक है
(4 बार है।)

∴ बहुलक = 7

व्यापित श्रेणी का बहुलक ज्ञात करना =

बहुलक (Z) = जिस चर की आवृत्ति
सर्वाधिक बार हो।

Q.

चर (X)	8	15	13	10	5	11
बारम्बारता (f)	4	3	6	15	12	9

का बहुलक बताइए?

∴ चर 10 की बारम्बारता सर्वाधिक है।

अतः बहुलक (Z) = 10

* माध्य (x̄), माधिका (m) और
बहुलक (Z) में सम्बन्ध =

$$\text{बहुलक} = 3 \times \text{माधिका} - 2 \times \text{माध्य}$$

$$\text{या } Z = 3m - 2\bar{x}$$

Q. किसी आँकड़ों का बहुलक '24'
तथा संगत माध्य '12' है तो
आँकड़ों की माधिका बताइए?

$$\text{बहुलक} = 3 \times \text{माधिका} - 2 \times \text{माध्य}$$

$$24 = 3 \times \text{माधिका} - 2 \times 12$$

$$\text{माधिका} = \frac{24 + 24}{3}$$

$$= \frac{48}{3} = 16$$

$$\text{माधिका} = 16$$

परिसर / परास (Range) =

किसी आँकड़े के न्यूनतम और
महत्तम मान के अन्तर को परिसर
कहा जाता है।

Q किसी कार्यालय के कुछ कर्मचारियों
के उम्र वर्षों में निम्न हैं।

38, 37, 45, 24, 36, 42, 59,

40 और 43 तो इनके उम्रों
का परिसर / परास बताइए ?

Solⁿ

उम्रों का परिसर = $59 - 24$

= 35 वर्ष

ज्यामिति (Geometry) [बहुभुज (Polygon)]



$$= 2 \times 180^\circ = 360^\circ$$



$$= 3 \times 180^\circ = 540^\circ$$



$$= 4 \times 180^\circ = 720^\circ$$

Note = उपर्युक्त चित्रों से स्पष्ट होगा
है कि किसी बहुभुज में बने
स्वतन्त्र त्रिभुजों की संख्या, भुजाओं
की संख्या से सदैव 2 कम होगा
है।

* किसी n बहुभुज के सभी
अन्तःकोणों का योग = स्वतन्त्र Δ
की संख्या $\times 180^\circ$

$$n \text{ बहुभुज के सभी अन्तःकोणों का योग} = (n-2) \times 180^\circ$$

* किसी n रश्मि बहुभुज के प्रत्येक
अन्तःकोणों का मान
= $\frac{\text{सभी अन्तःकोणों का योग}}{\text{भुजाओं की संख्या}}$

$$= \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$$

* किसी n रश्मि बहुभुज के प्रत्येक
बहिष्कोण का मान

$$= 180^\circ - \text{प्रत्येक अन्तःकोण}$$

$$= 180^\circ - \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$$

$$= \frac{180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ}{n}$$

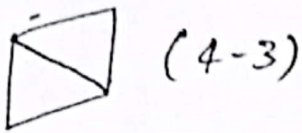
$$= \frac{360^\circ}{n}$$

किसी n रश्मि बहुभुज के
प्रत्येक बहिष्कोण का मान = $\frac{360^\circ}{n}$

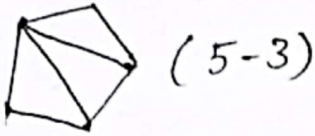
* किसी n बहुभुज के सभी
बहिष्कोण का योग = रश्मि बहिष्कोण $\times$ भुजाओं की संख्या

$$= \frac{360^\circ}{n} \times n$$

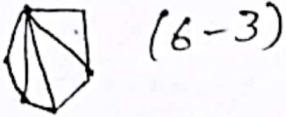
$$= 360^\circ$$



(4-3)



(5-3)



(6-3)

* किसी एक शीर्ष से खींचे गये विकर्ण =

→ किसी n बहुभुज से किसी एक शीर्ष से खींचे गये विकर्णों की संख्या = $(n-3)$

Note → किसी बहुभुज में बने कुल विकर्णों की संख्या, किसी एक शीर्ष से खींचे गये विकर्ण एवं भुजाओं की संख्या के आधे के गुणनफल के बराबर होता है।

→ किसी n बहुभुज में बने कुल विकर्णों की संख्या

$$= \frac{(n-3) \times n}{2}$$

Q किसी 24 भुजाओं के सम बहुभुज में प्रत्येक बहिष्कोण का मान बताइये?

$$\text{प्रत्येक बहिष्कोण} = \frac{15}{360} \times 360 = 15^\circ$$

Q किसी सम बहुभुज की प्रत्येक भुजा को क्रमानुसार एक ही ओर आगे बढ़ाया गया है, यदि इसके प्रत्येक बहिष्कोण का मान 72° हो तो बहुभुज में भुजाओं की संख्या बताइये?

$$n = \frac{360^\circ}{\text{प्रत्येक बहिष्कोण}} = \frac{360^\circ}{72} = 5$$

∴ भुजाओं की संख्या = 5

Q किसी सम बहुभुज के प्रत्येक अन्तःकोण का मान 144° है, तो बहुभुज में भुजाओं की संख्या बताइये?

$$\text{प्रत्येक बहिष्कोण} = 180 - 144 = 36^\circ$$

$$\therefore n = \frac{360^\circ}{36} = 10$$

Q किसी बहुभुज के सभी अन्तःकोणों का योग 1440° है तो -

(i) बहुभुज में भुजाओं की सं० = ?

(ii) कुल विकर्णों की संख्या = ?

(i) बहुभुज के सभी अन्तःकोण

$$\text{कामस} = (n-2) \times 180$$

$$1440 = (n-2) \times 180$$

$$n-2 = \frac{1440}{180}$$

$$n = 10$$

(ii) बहुभुज में कुल

$$\text{विकर्ण} = \frac{(n-3) \times n}{2}$$

$$= \frac{(10-3) \times 10}{2}$$

$$= \frac{7 \times 10}{2} = 35$$

Q किसी 10 भुजाओं के बहुभुज के सभी अन्तःकोणों का योग कितने समकोण के बराबर होगा?

$$\text{सभी अन्तःकोणों का योग} = (n-2) \times 180$$

$$= (10-2) \times 180$$

$$= 8 \times 180$$

$$= 1440$$

$$\therefore 1 \text{ समकोण} = 90^\circ$$

$$\therefore \text{कुल समकोण} = \frac{1440}{90}$$

$$= 16$$

Q किसी सम बहुभुज के प्रत्येक अन्तःकोण का माप प्रत्येक बहिष्कोण का माप गुना है तो बहुभुज में भुजाओं की संख्या बताइये?

$$\text{प्रत्येक अन्तःकोण} = \text{प्रत्येक बहिष्कोण} \times 5 \text{ गुना}$$

$$\frac{(n-2) \times 180}{2} = \frac{360}{2} \times 5$$

$$n-2 = 10 \Rightarrow n = 10+2$$

$$\boxed{n = 12}$$

Q किसी सम बहुभुज के प्रत्येक अन्तःकोण और प्रत्येक बहिष्कोण का अनुपात $7:2$ है तो बहुभुज में भुजाओं की संख्या बताइये?

$$\frac{\text{प्रत्येक अन्तःकोण}}{\text{प्रत्येक बहिष्कोण}} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{(n-2) \times 180}{n} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{(n-2)}{2} = \frac{7}{2}$$

$$2n - 4 = 14$$

$$2n = 18$$

$$\boxed{n = 9}$$

∴ बहुभुज में भुजाओं की संख्या = 9

Q किसी सम बहुभुज के प्रत्येक अन्तःकोण एवं प्रत्येक बहिष्कोण का अनुपात 7:2 है, तो बहुभुज में भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

→ उपरोक्त प्रश्न है।

अतः Answer = 9 आयेंगा।

Q किसी सम बहुभुज के प्रत्येक अन्तःकोण व प्रत्येक बहिष्कोण का अन्तर 108° है, तो बहुभुज में भुजाओं की संख्या बताइये?

$$I - E = 108$$

$$\frac{(n-2) \times 180}{n} - \frac{360}{n} = 108$$

$$\frac{180n - 360 - 360}{n} = 108$$

$$180n - 720 = 108n$$

$$180n - 108n = 720$$

$$72n = 720$$

$$n = 10$$

अतः बहुभुज में भुजाओं की संख्या = 10

Q किसी सम बहुभुज के प्रत्येक अन्तःकोण व प्रत्येक बहिष्कोण का अन्तर 60° है, तो बहुभुज में भुजाओं की संख्या बताइये?

$$\frac{(n-2) \times 180}{n} - \frac{360}{n} = 60$$

$$180n - 360 - 360 = 60n$$

$$180n - 60n = 720$$

$$120n = 720$$

$$n = \frac{720}{120}$$

$$n = 6$$

अतः बहुभुज में भुजाओं की संख्या = 6

88

Geometry रेखा और कोण (Line & Angle)

* पूरक कोण / कोटिपूरक कोण
(Complementary Angle) =

ऐसे दो कोण जिनका योगफल 90° हो,
पूरक कोण कहलाता है।

माना, कोण = θ

$\therefore$ पूरक कोण = $(90 - \theta)$

* सम्पूरक कोण (Supplementary Angle)

ऐसे दो कोण जिनका योगफल
 180° हो, सम्पूरक कोण कहलाता है।

माना, कोण = θ

तब सम्पूरक कोण = $(180 - \theta)$

* कोण का माप अंश, मिनट व सेकंड में

$$1^\circ = 60'$$

$$\text{और } 1' = 60''$$

Ex - 90° को अंश, मिनट व सेकंड
के मानक रूप में व्यक्त करें -

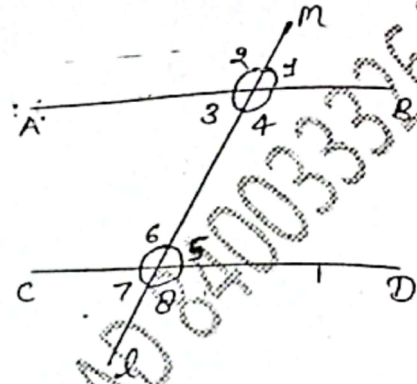
व्याख्या =

$$90^\circ = 89^\circ + 1^\circ$$

$$= 89^\circ + (59' + 1')$$

$$90^\circ = 89^\circ + 59' + 60''$$

* अन्तःकोण, बहिष्कोण, संगत कोण
व स्कान्तर कोण में सम्बन्ध =



(i) जब दो समांतर रेखाओं को
कोई तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करे,
तो संगत कोण आपस में
बराबर होते हैं।

संगतकोण : $\angle 1 = \angle 5$

व $\angle 2 = \angle 6$

$\angle 4 = \angle 8$

व $\angle 3 = \angle 7$

(ii) जब दो समांतर रेखाओं को
कोई तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करे
तो स्कान्तर कोण आपस में
बराबर होते हैं।

स्कान्तर - (A) बाह्य $\angle 1 = \angle 7$ व $\angle 2 = \angle 10$
कोण स्कान्तरकोण

(B) अन्तः $\angle 4 = \angle 6$ व $\angle 3 = \angle 5$
स्कान्तरकोण

(iii) जब दो समान्तर रेखाओं को कोई तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करे तो एक ही ओर के अन्तः कोणों का योग 180° होता है।

$$\begin{aligned}\angle 3 + \angle 6 &= 180^\circ \\ \angle 4 &= \angle 5 = 180^\circ\end{aligned}$$

Q. दो कोटिपूरक कोण x व y हैं जिसमें $x > y$, यदि इन कोणों में अन्तर 20° हो तो x का मान बताइये?

$$x + y = 90 \quad \text{--- (i) [कोटिपूरक = } 90^\circ \text{ से]}$$

$$x - y = 20 \quad \text{--- (ii)}$$

$$2x = 110$$

$$x = 55^\circ$$

x का मान समी (i) में रखने पर -

$$55 + y = 90$$

$$y = 35^\circ$$

Q. कोई कोण अपने कोटिपूरक कोण के दो गुने के बराबर है, तो उस कोण का मान बताइये?

$$\text{कोण} = \text{अपने कोटिपूरक कोण} \times 2$$

$$x = (90 - x) \times 2$$

$$x = 180 - 2x$$

$$3x = 180$$

$$x = 60^\circ$$

$$\text{अतः कोण का मान} = 60^\circ$$

Q. कोई कोण अपने सम्पूरक कोण के 4 गुने के बराबर है तो उस कोण का मान बताइये?

$$\text{कोण} = \text{अपने सम्पूरक कोण} \times 4$$

$$x = (180 - x) \times 4$$

$$x = 720 - 4x$$

$$5x = 720$$

$$x = 144$$

$$\text{अतः कोण का मान} = 144^\circ$$

Q कोई कोण अपने कोटिपूरक कोण के 3 गुने से 30 अधिक है तो उस कोण का मान बताइये?

$$\text{कोण} = \text{अपने कोटिपूरक कोण} \times 3 + 30$$

$$x = (90 - x) \times 3 + 30$$

$$x = 270 - 3x + 30$$

$$4x = 300$$

$$x = 75$$

Q किसी कोण का सम्पूरक कोण, उसके पूरक कोण के 4 गुने के बराबर है, तो उस कोण का मान बताइये?

$$\text{माना, वह कोण} = x$$

$$\text{सम्पूरक कोण} = \text{पूरक कोण} \times 4$$

$$(180 - x) = (90 - x) \times 4$$

$$180 - x = 360 - 4x$$

$$3x = 180$$

$$x = 60$$

Q P व Q पूरक कोण हैं। यदि P अपने सम्पूरक कोण के $\frac{9}{11}$ गुने के बराबर हो तो Q का मान बताइये?

$$P + Q = 90 \quad \text{--- (i)}$$

$$P = \text{अपने सम्पूरक कोण} \times \frac{9}{11}$$

$$P = (180 - P) \times \frac{9}{11}$$

$$11P = 1620 - 9P$$

$$20P = 1620$$

$$P = \frac{1620}{20}$$

$$P = 81$$

P का मान समी० (i) में रखने पर

$$81 + Q = 90$$

$$\boxed{Q = 9}$$

Q P व Q सम्पूरक कोण हैं। यदि P अपने पूरक कोण के $\frac{3}{7}$ गुने के बराबर हो तो Q का मान बताइये?

$$P + Q = 180 \quad \text{--- (i)}$$

$$P = \text{अपने पूरक कोण} \times \frac{3}{7}$$

$$P = (90 - P) \times \frac{3}{7}$$

$$7P = 270 - 3P$$

$$7P + 3P = 270$$

$$10P = 270$$

$$P = 27$$

P का मान समी० (i) में रखने पर

$$1. 27 + Q = 180$$

$$Q = 180 - 27$$

$$Q = 153$$

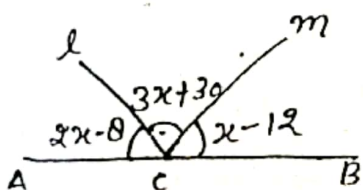
37°44'36" का पूरक कोण बताइए?

$$= 90 - 37^\circ 44' 36''$$

$$= 89^\circ 59' 60'' - 37^\circ 44' 36''$$

$$= 52^\circ 15' 24'' \text{ Ans}$$

दिए गए आकृति में x का मान बताइए?



$$\angle LCA + \angle LCM + \angle MCB = 180$$

$$(2x-8) + (3x+30) + (x-12) = 180$$

$$6x + 10 = 180$$

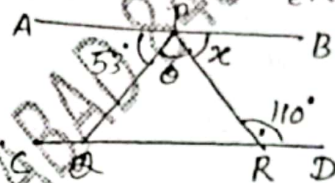
$$6x = 170$$

$$x = \frac{170}{6} = 28.33$$

दिए गए चित्र में AB || CD

$$\angle APQ = 53^\circ \text{ व } \angle PRQ = 110^\circ$$

हो तो Q का मान बताइए?



$$x + 110 = 180$$

$$x = 70^\circ$$

$$\therefore \angle APQ + \angle QPR + \angle BPR = 180^\circ$$

$$53^\circ + Q + 70^\circ = 180$$

$$Q = 180 - 123$$

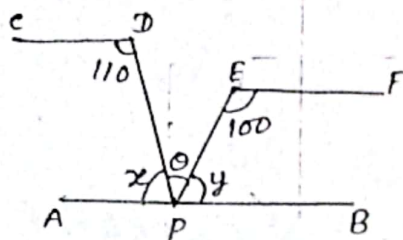
$$Q = 57^\circ$$

90

Q. चित्र में $AB \parallel CD \parallel EF$

और $\angle CDP = 110^\circ$ व

$\angle PEF = 100^\circ$ हैं तो $\theta = ?$



$\therefore CD \parallel AB$

$$\text{अतः } x = (180 - 110) \\ = 70^\circ$$

इसी प्रकार, $EF \parallel AB$

$$\text{अतः } y = (180 - 100) \\ = 80^\circ$$

$$\therefore x + \theta + y = 180$$

$$70 + \theta + 80 = 180$$

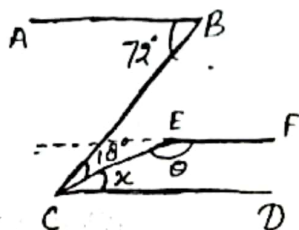
$$\theta = 180 - 150 \\ = 30^\circ$$

Q. चित्र में $AB \parallel CD \parallel EF$

$$\angle ABC = 72^\circ$$

$$\angle BCE = 18^\circ$$

तो $\theta = ?$



$$\angle ABC = \angle BCD \text{ (समान कोण)}$$

$$\text{तो } \angle BCD = 72^\circ$$

$$\angle BCE + \angle ECD = 72^\circ$$

$$18^\circ + \angle ECD = 72^\circ$$

$$\angle ECD = 72^\circ - 18^\circ \\ = 54^\circ$$

$\therefore EF \parallel CD$ है।

$$\text{अतः } \angle ECD + \angle FEC = 180^\circ$$

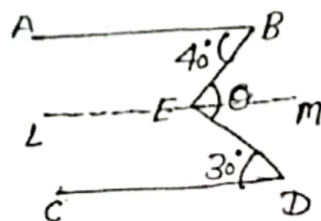
$$54^\circ + \angle FEC = 180^\circ$$

$$\theta = 180 - 54 \\ = 126^\circ$$

Q. चित्र में $AB \parallel CD$

$$\angle ABE = 40^\circ \text{ व } \angle CDE = 30^\circ$$

तो $\theta = ?$



$\therefore AB \parallel LM$

$$\text{अतः } \angle ABE = \angle BEM$$

$$40^\circ = 40^\circ \text{ (समान कोण)}$$

$\therefore CD \parallel LM$

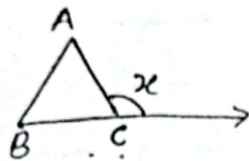
$$\text{अतः } \angle CDE = \angle MED$$

$$30^\circ = 30^\circ \text{ (समान कोण)}$$

$$\therefore \theta = (40 + 30) = 70^\circ$$

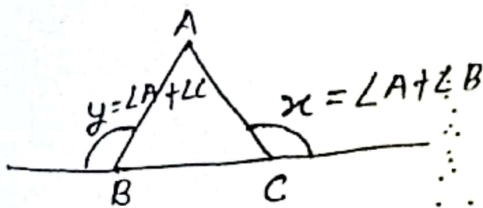
* त्रिभुज से सम्बन्धित महत्वपूर्ण तथ्य

* यदि किसी Δ की कोई एक भुजा एक ही ओर आगे बढ़ाया जाये तो बना बहिर्कोण सुदूर अन्तः कोणों के योग के बराबर होता है।



$$\text{बहिर्कोण}(x) = \angle A + \angle B$$

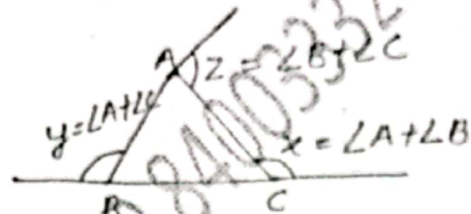
* यदि किसी त्रिभुज की कोई एक भुजा दोनों ओर बढ़ा दिया जाए तो इनके बहिर्कोणों का योगफल 180° और तीसरे कोण के योग के बराबर होता है।



$$\angle x + \angle y = \angle A + \angle B + \angle C + \angle A$$

$$\angle x + \angle y = 180^\circ + \angle A$$

* यदि किसी Δ की तीनों भुजाओं को एक ही ओर आगे बढ़ाया जाये तो इनके बहिर्कोणों का योगफल 360° होता है।



$$\angle x + \angle y + \angle z = (\angle A + \angle B) + (\angle A + \angle C) + (\angle B + \angle C)$$

$$= 2\angle A + 2\angle B + 2\angle C$$

$$= 2(\angle A + \angle B + \angle C)$$

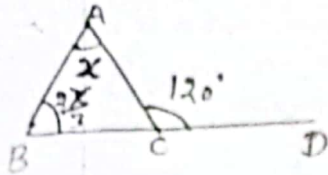
$$= 2 \times 180$$

$$\angle x + \angle y + \angle z = 360^\circ$$

$$\text{अतः } \angle x + \angle y + \angle z = 360^\circ$$

Q किसी $\triangle ABC$ की भुजा BC को बिन्दु D तक इस प्रकार आगे बढ़ाया जाता है कि $\angle ACD = 120^\circ$ है। यदि $\angle ABC, \angle BAC$ का $\frac{2}{3}$ है तो

$$\angle ABC = ?$$



$$\therefore x + \frac{2x}{3} = 120$$

$$5x = 120 \times 3$$

$$x = \frac{120 \times 3}{5}$$

$$x = 72^\circ$$

* किसी $\triangle$ का निर्माण तभी सम्भव है जब दो-दोही भुजाओं का योग तीसरी भुजा (बड़ी भुजा) से अधिक हो।

Q किसी $\triangle$ की भुजाएँ क्रमशः 3 cm, 5 cm व 10 cm हैं, तो त्रिभुज का परिमाण बताइए?

Ans = यहाँ त्रिभुज का निर्माण सम्भव नहीं है।

Q किसी त्रिभुज ABC की भुजा BC को दोनों ओर आगे बढ़ाया गया है तो इनके बहिष्कोणों का योग बताइए -

(a) $360 + \angle A$

(b) $180 + \angle B$

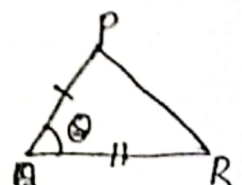
(c) $180 + \angle C$

(d) $\pi + \angle A + 180 + \angle A$

त्रिभुज की सर्वांगसमता =

S-A-S - (Side Angle Side) -

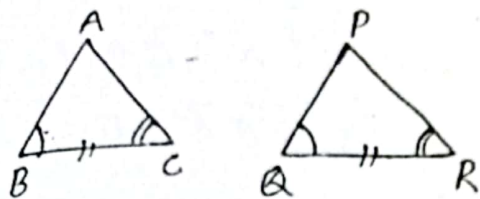
यदि किसी $\triangle$ की दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण, किसी दूसरे $\triangle$ की संगत दोनो भुजाएँ और इनके बीच के कोण के बराबर हो तो $\triangle$ सर्वांगसम होंगे।



$$\triangle ABC \cong \triangle PQR$$

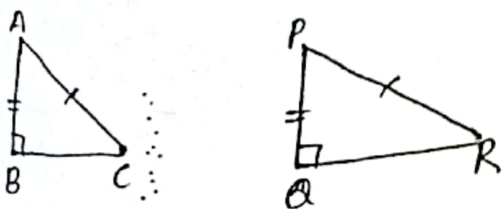
(A-S-A) - (Angle Side Angle)

यदि किसी Δ का कोई दो कोण और उनके बीच की आन्तरिक भुजा किसी दूसरे Δ के संगत दोनों कोण और इनके बीच की आन्तरिक भुजा के बराबर हो तो Δ सर्वांगसम होंगे।



$$\Delta ABC \cong \Delta PQR$$

(R-H-S) = यदि किसी समकोण Δ का कर्ण और कोई एक भुजा किसी दूसरे समकोण Δ के कर्ण और संगत भुजा के बराबर हो तो Δ सर्वांगसम होंगे।



$$\Delta ABC \cong \Delta PQR$$

त्रिभुज की समरूपता =

(A-A-A) =

यदि किसी Δ के तीनों कोण किसी अन्य Δ के संगत तीनों कोण के बराबर हो तो Δ समरूप होगा।



$$\Delta ABC \sim \Delta PQR$$

Δ की सर्वांगसमता और समरूपता में

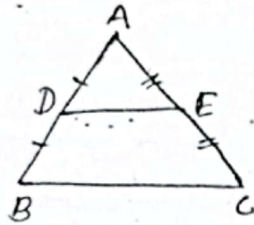
सम्बन्ध =

→ यदि दो Δ सर्वांगसम हैं तो वे निश्चित रूप से समरूप होंगे, परन्तु यदि दो समरूप हैं तो जरूरी नहीं वे सर्वांगसम होंगे।

→ यदि दो Δ सर्वांगसम हैं तो निश्चित रूप से दोनों त्रिभुज के क्षेत्रफल समान होंगे, परन्तु दो Δ के क्षेत्रफल समान हो तो जरूरी नहीं वे सर्वांगसम होंगे।

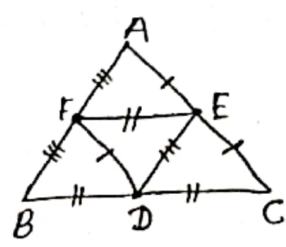
→ दो समरूप Δ सर्वांगसम होंगे,
जब इनके क्षेत्रफल भी समान
हों।

→ यदि किसी त्रिभुज की दो
भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को
मिलाया जाये तो यह तीसरी भुजा
के समान्तर एवं आधी होती है।



$$DE \parallel BC \text{ और } DE = \frac{1}{2} BC$$

* त्रिभुज की भुजाओं पर स्थित
मध्य बिन्दुओं के निष्कर्ष =



ΔABC की भुजा BC, AC व
AB के मध्य बिन्दु क्रमशः

D, E व F हैं, तो यहाँ से
निम्न निष्कर्ष प्राप्त होंगे?

(i) $EF = \frac{1}{2} BC$, $DE = \frac{1}{2} AB$
व $FD = \frac{1}{2} AC$

(ii) $\Delta AEF \cong \Delta FBD \cong \Delta EDC \cong \Delta DEF$
(S-S-S से)

$\therefore$ सर्वांगसम Δ के क्षेत्रफल
समान होते हैं अतः

(iii)

$$\begin{aligned} \text{क्षेत्र } \Delta AEF &= \text{क्षेत्र } \Delta FBD = \text{क्षेत्र } \Delta EDC \\ &= \text{क्षेत्र } \Delta DEF = \frac{1}{4} \text{ क्षेत्र } \Delta ABC \end{aligned}$$

(iv)

$\square FEDB$, $\square FECD$,
 $\square AFDE$ समान्तर चतुर्भुज हैं।
[$\because$ प्रत्येक समान्तर चतुर्भुज दो Δ
से मिलकर बना है]

अतः

$$\begin{aligned} \text{क्षेत्र } \square FEDB &= \text{क्षेत्र } \square FECD \\ &= \text{क्षेत्र } \square AFDE = 2 \times \frac{1}{4} \text{ क्षेत्र } \Delta ABC \\ &= \frac{1}{2} \text{ क्षेत्र } \Delta ABC \end{aligned}$$

किसी $\triangle ABC$ में भुजा BC , AC व AB के मध्य बिन्दु क्रमशः D , E व F हैं, तो $\triangle DEF$ का क्षेत्रफल कितना होगा?

- (a) $4 \times \triangle ABC$ का क्षेत्रफल
 (b) $\frac{1}{2} \times \triangle ABC$ का क्षेत्रफल
 (c) $\frac{1}{3} \times \triangle ABC$ का क्षेत्रफल
 (d) $\frac{1}{4} \times \triangle ABC$ का क्षेत्रफल

त्रिभुज की प्रकृति (Nature of triangle)

यदि $\triangle$ की तीनों भुजाएँ a , b व c हों जिसमें सबसे बड़ी भुजा ' c ' है तब -

- (i) यदि $c^2 = a^2 + b^2$ तब $\triangle$ समकोण त्रिभुज होगा।
 (ii) यदि $c^2 > a^2 + b^2$ तब त्रिभुज अधिक कोणीय होगा।
 (iii) यदि $c^2 < a^2 + b^2$ तब त्रिभुज न्यून कोणीय होगा।

- न्यूनकोण $\rightarrow 90^\circ$ से कम
 समकोण $\rightarrow$ एक कोण 90° हो
 अधिककोण $\rightarrow 90^\circ$ से अधिक व 180° से कम हो
 रूढ़कोण $\rightarrow 180^\circ$ (सीक हो)
 प्रतिवर्तकोण $\rightarrow 180^\circ$ से अधिक

Note - किसी $\triangle$ में एक-न्यूनकोण निर्धारित होता है।

Q निम्न त्रिभुजों की प्रकृति बताइए?

- (i) 9, 12 व 15
 (ii) 6, 7 व 10
 (iii) 6, 12 व 13

Solⁿ -

(i) बड़ी भुजा का वर्ग $= (15)^2 = 225$

अन्य दो भुजाओं $= (9)^2 + (12)^2$

के वर्ग का योग

$= 81 + 144$

$= 225$

$(15)^2 = (9)^2 + (12)^2$

$\therefore$ समकोण त्रिभुज है।

(ii) बड़ी भुजा का वर्ग = $(10)^2 = 100$

अन्य दो भुजाओं के वर्गों का योग = $(6)^2 + (7)^2$
 $= 36 + 49$
 $= 85$

$(10)^2 > (8)^2 + (6)^2$

$\therefore$ अधिक कोणीय त्रिभुज है।

(iii) बड़ी भुजा का वर्ग = $(13)^2 = 169$

अन्य दो भुजाओं के वर्गों का योग = $(6)^2 + (12)^2$
 $= 36 + 144$
 $= 180$

$(13)^2 < (6)^2 + (12)^2$

$\therefore$ न्यून कोणीय Δ है।

Δ के केन्द्र (Centre of Triangle) =

(i) गुरुत्व केन्द्र (centroid)

(ii) अन्तः परिकेन्द्र (Incentre)

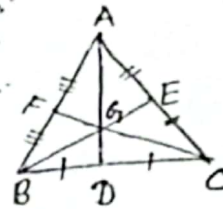
(iii) परिकेन्द्र (Circumcentre)

(iv) लम्ब केन्द्र (Orthocentre)

1. केन्द्रक/गुरुत्व केन्द्र (centroid)

Δ की माध्यिकाएँ जिस बिन्दु पर मिलती हैं, वह गुरुत्व केन्द्र कहलाता है।

माध्यिका - त्रिभुज के भुजा के मध्य बिन्दु को सम्पर्क वाली शीर्ष से मिलाने वाली रेखा माध्यिका कहलाता है।



G = गुरुत्व केन्द्र / केन्द्रक

गुरुत्व केन्द्र के गुण :-

(i) माध्यिका शीर्ष से केन्द्रक को 2:1 के अनुपात में विभक्त करती है।

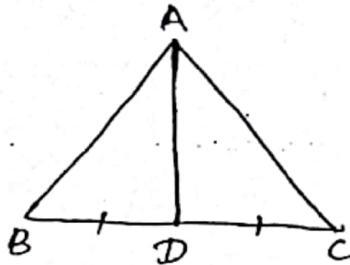
$$\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = \frac{2}{1}$$

या

$$\frac{GD}{AD} = \frac{1}{3}, \quad \frac{GE}{BE} = \frac{1}{3}$$

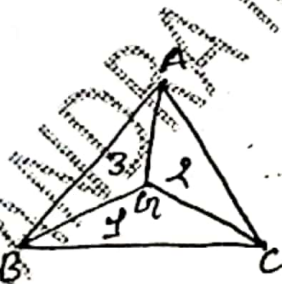
$$\text{व } \frac{GF}{FC} = \frac{1}{3}$$

(ii) माधिका, Δ को दो बराबर क्षेत्रफल में विभक्त करती है। (iv)

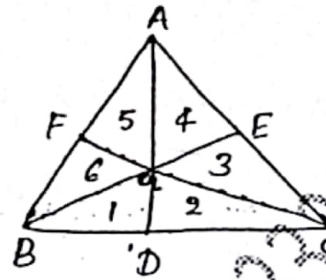


$$\therefore \text{क्षे० } \Delta ABD = \text{क्षे० } \Delta ACD \\ = \frac{1}{2} \text{क्षे० } \Delta ABC$$

(iii) केन्द्रक को शीर्ष से मिलाने वाली रेखा, Δ को तीन बराबर क्षेत्रफल वाले भागों में विभक्त करती है।



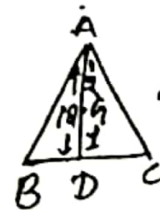
$$\therefore \text{क्षे० } \Delta BGC = \text{क्षे० } \Delta AGC \\ = \text{क्षे० } \Delta AGB = \frac{1}{3} \text{क्षे० } \Delta ABC$$



चित्र में,

$$\text{क्षे० } \Delta BGD = \text{क्षे० } \Delta GDC = \text{क्षे० } \Delta GEC \\ = \text{क्षे० } \Delta AGE = \text{क्षे० } \Delta AGF \\ = \text{क्षे० } \Delta BGF = \frac{1}{6} \text{क्षे० } \Delta ABC$$

Q. किसी ΔABC की माधिका $AD = 18$ cm हैं तथा 'G' ΔABC का केन्द्रक है। तो GD की लम्बाई बताइये?

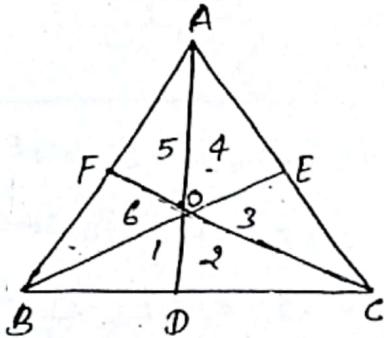


$$AD = 18 \text{ cm}$$

$$GD = \frac{1}{3} \times AD$$

$$\therefore GD = \frac{18}{3} = 6 \text{ cm}$$

Q किसी $\triangle ABC$ की माध्यिकाएँ क्रमशः AD, BE व CF हैं तथा गुणत्वकेन्द्र 'O' है यदि $\triangle OBD$ क्षेत्रफल 8 cm^2 हो तो $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल बताइये?

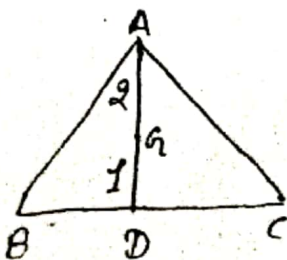


$$\text{क्षेत्रफल } \triangle OBD = \frac{1}{6} \text{ क्षेत्रफल } \triangle ABC$$

$$8 = \frac{1}{6} \text{ क्षेत्रफल } \triangle ABC$$

$$\begin{aligned} \text{क्षेत्रफल } \triangle ABC &= 8 \times 6 \\ &= 48 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Q $\triangle ABC$ का गुणत्वकेन्द्र O है यदि $AO = 24 \text{ cm}$ हो तो माध्यिका $AD = ?$

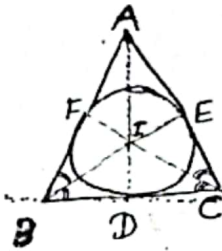


$$\begin{aligned} AO &= 24 \\ \text{तो } AD &= 36 \text{ cm} \end{aligned}$$

अन्तःकेन्द्र = (Incentre) =

किसी $\triangle$ के कोण समद्विभाजक जिस बिन्दु पर मिलता है अन्तःकेन्द्र कहलाता है।

→ अन्तःकेन्द्र $\triangle$ में स्थित वह बिन्दु होता है, जिसे केन्द्र मानकर $\triangle$ की भुजाओं की स्पर्श करवा हुआ वृत्त खींचा जा सकता है।



$\triangle$ के अन्तः वृत्त की त्रिज्या, $r = \frac{\Delta}{S}$

$\Delta \rightarrow \triangle$ का क्षेत्रफल

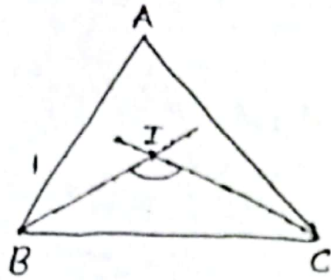
$S \rightarrow \triangle$ का अर्धपरिमाप

* समबाहु $\triangle$ के अन्तः वृत्त की त्रिज्या

$$r = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{3a}{2}}$$

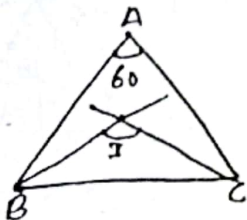
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times \frac{2}{3a} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

- * किसी Δ में दो कोणों के अन्तः समद्विभाजक से बना कोण, समकोण और तीसरे कोण के योग के बराबर होता है।



$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$$

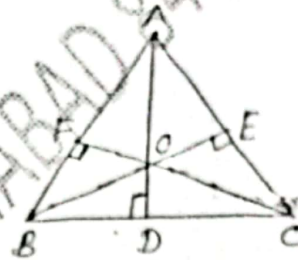
- Q किसी त्रिभुज ABC में शीर्ष कोण A, 60° है। यदि $\angle B$ व $\angle C$ के अन्तः समद्विभाजक बिन्दु I पर मिलते हों तो $\angle BIC = ?$



$$\begin{aligned}\angle BIC &= 90^\circ + \frac{\angle A}{2} \\ &= 90^\circ + \frac{60}{2} \\ &= 90 + 30 = 120^\circ\end{aligned}$$

लम्बकेन्द्र (Orthocentre) =

किसी त्रिभुज के शीर्ष से सामने वाली भुजा पर डाला गया लम्ब, जिस बिन्दु पर मिलता है लम्बकेन्द्र कहलाता है।



O = लम्बकेन्द्र

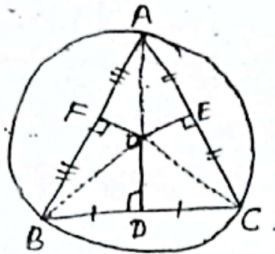
तथा AD, BE व CF $\Rightarrow$ शीर्षलम्ब

- * किसी न्यूनकोणीय Δ का लम्बकेन्द्र, Δ के अन्दर होता है।
- * किसी समकोणीय Δ का लम्बकेन्द्र समकोण वाला शीर्ष होता है।
- * किसी अधिक कोणीय Δ का लम्बकेन्द्र Δ के बाहर बनता है।

परिकेन्द्र (Circumcentre) =

किसी Δ का लम्ब समद्विभाजक जिस बिन्दु पर मिलता है. परिकेन्द्र कहलाता है।

→ परिकेन्द्र वह बिन्दु होता है, जिसे केन्द्र मानकर त्रिभुज की शीर्षों को स्पर्श करता हुआ वृत्त खींचा जा सकता है।

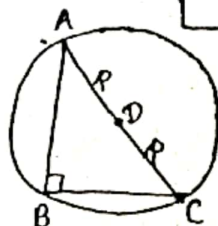


→ परिकेन्द्र से Δ के शीर्षों की दूरियाँ समान होती हैं, जिसे परिलिख्या कहते हैं।

$$R = \frac{abc}{4\Delta}$$

→ किसी समकोण त्रिभुज का परिकेन्द्र कर्ण का मध्य बिन्दु होता है। अर्थात् समकोण Δ की परिलिख्या,

$$R = \frac{\text{कर्ण}}{2}$$



→ किसी अधिक कोणीय Δ का परिकेन्द्र, Δ के बाहर बसा है।

Q किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ क्रमशः 9 cm, 12 cm व 15 cm हैं, तो इस त्रिभुज के परिलिख्या की ल० बताइये?

$$(9)^2 + (12)^2 = (15)^2$$

$$81 + 144 = 225$$

$$225 = 225 \text{ (अतः त्रिभुज समकोण } \Delta \text{ होगा)}$$

समकोण Δ की परिलिख्या, $R = \frac{\text{कर्ण}}{2}$

$$R = \frac{15}{2}$$

$$= 7.5 \text{ cm}$$

Q किसी ΔABC का परिकेन्द्र 'O' है तथा $OD \perp BC$ । यदि $BC = 24 \text{ cm}$ हो तथा परिलिख्या 13 cm हो तो OD की ल० बताइये?

समकोण ΔODB में

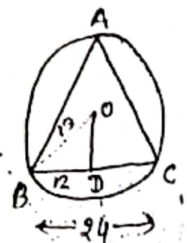
$$\text{लम्ब. } OD = \sqrt{(OB)^2 - (BD)^2}$$

$$= \sqrt{(13)^2 - (12)^2}$$

$$= \sqrt{169 - 144}$$

$$OD = \sqrt{25}$$

$$OD = 5 \text{ cm} \text{ Ans}$$



सामान्य बीजगणित

बीजगणितीय तारत्व पर प्रश्न =

(Algebraic Identity based Quesⁿ)

Point = यदि $x + \frac{1}{x} = a$ हो तो (i) $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$ (ii) $x^3 + \frac{1}{x^3} = ?$ (iii) $x^4 + \frac{1}{x^4} = ?$

(iv) $x^5 + \frac{1}{x^5} = ?$

Derivation =

(i) $x + \frac{1}{x} = a$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \times x \times \frac{1}{x} = a^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4 - 4a^2 + 2$$

(ii) $x + \frac{1}{x} = a$

दोनों पक्षों का घन करने पर -

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \times x \times \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x} \right) = a^3$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3a = a^3$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a$$

Derivation - करने पर =

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) = (a^2 - 2)(a^3 - 3a)$$

$$\Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x^5} = a^5 - 3a^3 - 2a^2 + 6a$$

$$\Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} + a = a^5 - 5a^3 + 6a$$

$$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = a^5 - 5a^3 + 5a$$

Q यदि $x + \frac{1}{x} = 5$ हो तो (i) $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$

(ii) $x^4 + \frac{1}{x^4} = ?$

$$(i) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = 5^2 - 2$$

$$= 25 - 2$$

$$\boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = 23}$$

$$(ii) \quad x^4 + \frac{1}{x^4} = (5)^4 - 4(5)^2 + 2$$

$$= 625 - 100 + 2$$

$$\boxed{x^4 + \frac{1}{x^4} = 527}$$

Q यदि $x^2 - 3x + 1 = 0$ हो तो

(i) $x + \frac{1}{x} = ?$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

दोनों पक्षों में x से
भाग देने पर-

$$\frac{x^2}{x} - \frac{3x}{x} + \frac{1}{x} = 0$$

$$x - 3 + \frac{1}{x} = 0$$

$$\boxed{x + \frac{1}{x} = 3}$$

(ii) $x^3 + \frac{1}{x^3} = ?$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (3)^3 - 3(3)$$

$$= 27 - 9$$

$$\boxed{x^3 + \frac{1}{x^3} = 18}$$

* जब $x^4 + \frac{1}{x^4}$ का मान दिया हो-

Note =

यदि $x^4 + \frac{1}{x^4} = a$ हो तो

$$(i) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \sqrt{a+2} = n$$

$$(ii) \quad x + \frac{1}{x} = \sqrt{n+2}$$

Q यदि $x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$ हो तो $x + \frac{1}{x} = ?$

$$x + \frac{1}{x} = \sqrt{23+2}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$\boxed{x + \frac{1}{x} = 5} \quad \text{Ans}$$

इसरी विधि =

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$$

दोनों पक्षों में 2 जोड़ने पर-

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 23 + 2$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 25$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (5)^2$$

$$\boxed{x + \frac{1}{x} = 5}$$

$$\underline{\text{Q}} \text{ यदि } x^2 + \frac{1}{x^2} = 62 \text{ हो तो } -$$

$$x + \frac{1}{x} = ?$$

$$x + \frac{1}{x} = \sqrt{62 + 2}$$

$$= \sqrt{64}$$

$$\boxed{x + \frac{1}{x} = 8}$$

$$\underline{\text{Q}} \text{ जब यदि } x^4 + \frac{1}{x^4} = 194 \text{ हो तो}$$

$$(i) x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$$

$$(ii) x + \frac{1}{x} = ?$$

$$(i) x^2 + \frac{1}{x^2} = \sqrt{194 + 2}$$

$$= \sqrt{196}$$

$$\boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = 14}$$

$$(ii) x + \frac{1}{x} = \sqrt{14 + 2}$$

$$= \sqrt{16}$$

$$\boxed{x + \frac{1}{x} = 4}$$

$$\underline{\text{Q}} \text{ यदि } x^2 + \frac{1}{x^2} = 11 \text{ हो तो } x - \frac{1}{x} = ?$$

दोनों पक्षों में 2 घटाने पर -

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 11 - 2$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (3)^2$$

$$\boxed{x - \frac{1}{x} = 3}$$

Note =

$$\text{यदि } x^2 + \frac{1}{x^2} = a \text{ हो}$$

$$\text{तो } x - \frac{1}{x} = \sqrt{a - 2}$$

Note

यदि $x^4 + \frac{1}{x^4} = a$ हो तो

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \sqrt{a+2} = m$$

$$x - \frac{1}{x} = \sqrt{m-2}$$

Q यदि $x^4 + \frac{1}{x^4} = 119$ हो तो -

(i) $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$

(ii) $x - \frac{1}{x} = ?$

(i) $x^2 + \frac{1}{x^2} = \sqrt{119+2}$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \sqrt{121}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 11$$

(ii) $x - \frac{1}{x} = \sqrt{11-2}$

$$x - \frac{1}{x} = \sqrt{9}$$

$$x - \frac{1}{x} = 3$$

* जब $x + \frac{1}{x} = 2$ दिया हो =

Note

यदि $x + \frac{1}{x} = 2$ दिया हो तो ऐसे

प्रश्नों को हल करने के लिए व्यंजक में $x = 1$ मान रखकर हल करें-

Proof =

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = 2$$

$$x^2 + 1 = 2x$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$\therefore x - 1 = 0$$

$$\text{अतः } \boxed{x = 1}$$

Q यदि $x + \frac{1}{x} = 2$ हो तो $x^{37} + \frac{1}{x^{100}}$

का मान बताइए?

$\therefore x = 1$ सभी को सन्तुष्ट करता है।

$$x^{37} + \frac{1}{x^{100}} = (1)^{37} + \frac{1}{(1)^{100}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1} = 2$$

Q यदि $x + \frac{1}{x} = 2$ हो तो $x^{34} - \frac{1}{x^{37}}$
का मान बताइये?

$\therefore x = 1$ समी० को सन्तुष्ट करता है।

$$\begin{aligned}\therefore x^{34} - \frac{1}{x^{37}} &= (1)^{34} - \frac{1}{(1)^{37}} \\ &= 1 - \frac{1}{1} \\ &= 1 - 1 = 0 \text{ Ans}\end{aligned}$$

* जब $x + \frac{1}{x} = -2$ दिया हो =

Note यदि $x + \frac{1}{x} = -2$ दिया हो तो
 $x = -1$ रखकर प्रश्न हल करें।

Q यदि $x + \frac{1}{x} = -2$ हो तो $x^{45} + \frac{1}{x^{50}}$
का मान बताइये?

$\therefore x = -1$ समी० को सन्तुष्ट करता है।

$$\begin{aligned}\text{अतः } (x)^{45} + \frac{1}{x^{50}} &= (-1)^{45} + \frac{1}{(-1)^{50}} \\ &= -1 + \frac{1}{1} \\ &= 0 \text{ Ans}\end{aligned}$$

* जब प्रश्न की बनावट $x + \frac{1}{x} = 1$ हो =

Note यदि $x + \frac{1}{x} = 1$ हो
तो $x^3 + 1 = 0$

Point यदि $x + \frac{1}{x} = 1$ हो तो $x^3 + 1 = ?$

Derivation =

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = 1$$

$$\text{या, } x^2 + 1 = x$$

$$x^2 + 1 - x = 0 \quad \text{--- (i)}$$

$$\text{अतः } x^3 + 1 = x^3 + 1 \cdot 3$$

$$= (x+1)(x^2 + 1 - x)$$

$$x^3 + 1 = (x+1) \times 0$$

$$\text{तो, } \boxed{x^3 + 1 = 0}$$

Q यदि $x + \frac{1}{x} = 1$ हो तो $x^{12} + x^9 + x^5 + x^2 + 1$
का मान बताइये।

$$\begin{aligned}&\Rightarrow x^{12} + x^9 + x^5 + x^2 + 1 \\ &= x^9(x^3 + 1) + x^2(x^3 + 1) + 1 \\ &= x^9(0) + x^2(0) + 1 \\ &= 0 + 0 + 1 = 1 \quad \text{98}\end{aligned}$$

Q यदि $x + \frac{1}{x} = 1$ हो तो

$$x^{27} + x^{24} + x^{18} + x^{15} + x^6 + x^3 = ?$$

Soln

$$x^{27} + x^{24} + x^{18} + x^{15} + x^6 + x^3$$

अंतर=3 अंतर=3 अंतर=3

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

दूसरी विधि =

$$x^{27} + x^{24} + x^{18} + x^{15} + x^6 + x^3$$

$$= x^{24}(x^3 + 1) + x^{15}(x^3 + 1) + x^3(x^3 + 1)$$

$$= x^{24}(0) + x^{15}(0) + x^3(0)$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

Q यदि $x + \frac{1}{x} = 1$ हो तो $x^{15} + \frac{1}{x^{12}}$ का मान बताइये?

$$= x^{15} + \frac{1}{x^{12}}$$

$$= (x^3)^5 + \frac{1}{(x^3)^4}$$

$$= (-1)^5 + \frac{1}{(-1)^4}$$

$$= -1 + \frac{1}{1} = -1 + 1 = 0$$

Q $x + \frac{1}{x} = 1$ हो तो $x^{96} + \frac{1}{x^{24}}$ का मान बताइये?

$$= x^{96} + \frac{1}{x^{24}}$$

$$= (x^3)^{32} + \frac{1}{(x^3)^8}$$

$$= (-1)^{32} + \frac{1}{(-1)^8}$$

$$= 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$$

* अब प्रश्न का structure

$$a + b + c = 0 \text{ हो =}$$

Q यदि $a + b + c = 0$ हो तो

$$\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} \text{ का मान बताइये?}$$

$$\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}$$

$$\frac{a + b + c}{abc}$$

$$= \frac{a + b + c}{abc} = \frac{0}{abc} = 0$$

Q यदि $x+y+z=0$ हो तो

$$\frac{-3xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Soln-

$$\therefore x+y = -z$$

$$y+z = -x$$

$$z+x = -y$$

यह मान व्यंजक में रखने पर-

$$\begin{aligned} \text{अतः } & \frac{-3xyz}{-2x-x-x-y} \\ & = \frac{+3xyz}{+xyz} \\ & = 3 \end{aligned}$$

Q यदि $a+b+c=0$ हो तो-

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)$$

$$\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right) = ?$$

Soln-

$$a+b = -c$$

$$b+c = -a$$

$$a+c = -b$$

यह मान व्यंजक में रखने पर-

$$= \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right)$$

$$= \left(\frac{a}{-a} + \frac{b}{-b} + \frac{c}{-c} \right) \left(\frac{-c}{a} + \frac{-a}{b} + \frac{-b}{c} \right)$$

$$= (-1-1-1) (-1-1-1)$$

$$= (-3) (-3)$$

$$= 9 \text{ Ans}$$

Q यदि $a+b+c=0$ हो तो-

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} = ?$$

Soln-

$$a+b+c = 0$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर-

$$(a+b+c)^2 = 0$$

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = 0$$

$$a^2+b^2+c^2 = -2(ab+bc+ca)$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{(ab+bc+ca)} = -2 \text{ Ans}$$

शेषफल प्रमेय पर प्रश्न =

Q व्यंजक $x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 5x - 2$ को $(x-1)$ से भाग देने पर शेषफल कितना बचेगा?

Note

बहुपदीय व्यंजक में भाग देने समय सर्वप्रथम भाजक को शून्य के बराबर रखकर प्राप्त चर का मान व्यंजक में रखकर अभीष्ट शेषफल ज्ञात कर लेते हैं।

Solⁿ =

$$x-1=0$$

$$\text{तब } x=1$$

$$\begin{aligned} \text{शेष} &= (1)^6 + 3(1)^4 - 3(1)^2 + 5(1) - 2 \\ &= 1 + 3 - 3 + 5 - 2 \\ &= 6 - 2 = 4 \end{aligned}$$

Q व्यंजक $3x^3 - 2x^2y - 13xy^2 + 10y^3$ को $x-2y$ से भाग देने पर शेषफल कितना बचेगा?

Solⁿ = $x-2y=0$

$$x=2y$$

$$\begin{aligned} \text{शेष} &= 3(2y)^3 - 2(2y)^2 \cdot y - 13(2y)y^2 + 10y^3 \\ &= 3 \cdot 8y^3 - 2 \cdot 4y^2 \cdot y - 13 \cdot 2y \cdot y^2 + 10y^3 \\ &= 24y^3 - 8y^3 - 26y^3 + 10y^3 \\ &= 34y^3 - 34y^3 \end{aligned}$$

$$\text{शेष} = 0$$

Q व्यंजक $x^3 + 3x^2 - Kx + 4$ का एक गुणनखण्ड $x-2$ है तो $K=?$ मान बताइए?

$$x-2=0$$

$$\text{तब } x=2 \text{ यह मान व्यंजक में रखने पर -}$$

$$\begin{aligned} \text{शेष} &= (2)^3 + 3(2)^2 - K \cdot 2 + 4 \\ 0 &= 8 + 12 - 2K + 4 \\ 0 &= 24 - 2K \\ 2K &= 24 \end{aligned}$$

$$\boxed{K = 12}$$

Q व्यंजक $x^3 + 3x^2 - Kx + 4$ में $(x-2)$ से भाग देने पर शेषफल 'K' बचता है तो K का मान बताइए?

$$\begin{aligned} x-2=0 \text{ तब } x=2 \text{ व्यंजक में रखने पर} \\ \text{शेष} &= (2)^3 + 3(2)^2 - K \cdot 2 + 4 \\ K &= 8 + 12 - 2K + 4 \\ 3K &= 24 \Rightarrow \boxed{K = 8} \end{aligned}$$



चन्द्रा इंस्टीट्यूट

Mobile : 9936357073, 9936444561

रामबाग ब्रांच

श्याम सुन्दरम टॉवर के बगल
(सिन्डिकेट बैंक के नीचे),
इलाहाबाद मो.: 8400333264

सिविल लाइंस ब्रांच

Vinu Education Group
सिविल लाइन्स, (फायर स्टेशन
चौराहा) के.पी. बी.टी.सी., कैम्पस
मो.: 9451362247

अल्लापुर ब्रांच

लेबर चौराहा व राजू पुस्तक
के बीच में इलाहाबाद
मो.: 8400333260

SSC

BANK

RRB

TET

CTET

प्राथमिक शिक्षक

UPP, SSC (GD)